1 Множества

Задача 1.1. Сколько различных подмножеств, включая несобственные, имеет множество из n элементов?

Задача 1.2. Доказать, что:

1. $A \triangle B = (A \cup B)\ (A \cap B)$
2. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
3. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
4. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
5. $A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$

Задача 1.3. Перечислите все отображения $\{0, 1, 2\} \to \{0, 1\}$. Какие из них являются сюръективными, какие — инъективными?

Задача 1.4. Перечислите все отображения $\{0, 1\} \to \{0, 1, 2\}$. Какие из них являются сюръективными, какие — инъективными?

Задача 1.5. Определите класс каждого из отображений:

1. $\mathbb{N} \xrightarrow{x \mapsto x^2} \mathbb{N}$
2. $\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto x^2} \mathbb{Z}$
3. $\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto x^2} \mathbb{R}$
4. $\mathbb{N} \xrightarrow{x \mapsto 11x} \mathbb{N}$
5. $\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto 11x} \mathbb{Z}$
6. $\mathbb{Q} \xrightarrow{x \mapsto 11x} \mathbb{Q}$

Задача 1.6. Формула включений/исключенийДоказать, что имеет место равенство

$$|\cup X_i| = \sum |X_i| - \sum |X_i \cap X_j| + \sum |X_i \cap X_j \cap X_h| - \dots,$$

где первая сумма берется по всем i, вторая — по всем $i < j$, третья — по всем $i < j < h$ и т. д.

Задача 1.7. Доказать, что для любых четырех множеств X, Y, Z, W имеет место равенство

$$(X \cap Y) \times (Z \cap W) = (X \times Z) \cap (Y \times W) = (X \times W) \cap (Y \times Z).$$

Задача 1.8. При каких условиях верно $(X \cup Y) \times (Z \cup W) = (X \times Z) \cup (Y \times W)$?

Задача 1.9. Найдите количество чисел в интервале $[1000, 2000]$, которые не делятся на $3, 5, 7$.

Задача 1.10. Группа из 22 студентов успешно сдала сессию из трех экзаменов. Докажите, что по крайней мере 4 студента сдали сессию с одинаковым множеством оценок.

Задача 1.11. Группа из 21 студента успешно сдала сессию из трех экзаменов. Докажите, что по крайней мере 3 студента сдали сессию с одинаковым набором (т. е. совокупностью с учётом кратности) оценок.

Задача 1.12. Группа из 28 студентов успешно сдала сессию из трех экзаменов. Докажите, что по крайней мере 2 студента сдали сессию с одинаковой последовательностью оценок.

Задача 1.13. Докажите, что

1. Любые два отрезка равномощны.

2. Любые два интервала равномощны.

3. Любой интервал равномощен любому отрезку.

4. Любой отрезок равен любому квадрату.

Задача 1.14. Площадь комнаты — 6 метров. В ней уложены 3 ковра площадью 3 и произвольной формы. Доказать, что имеется каких-то два ковра, площадь пересечения которых не менее 1.