4 Индукция

Задача 4.1. Докажите, что любой квадрат можно разрезать на любое, начиная с шести, количество квадратов.

Задача 4.2. При каких $n > 3$ набор гирь с массами $1, 2, 3, \ldots, n$ граммов можно разложить на три равные по массе кучки?

Задача 4.3. Докажите неравенство для натуральных n:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}.$$

Задача 4.4. Доказать по индукции, что для любых натуральных $n \geqslant 2$ выполняется неравенство:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

Задача 4.5. Пусть $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (2k)^3$ и $U_n = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} k^3$. Объясните, почему $U_n + T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (2k+1)^3$. Вычислите T_n и U_n.

Задача 4.6. Упростите $\sum\limits_{k=0}^{n} (2k+1)^3$.

Задача 4.7. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Задача 4.8. Последовательность (u_n) задаётся первым членом $u_0 = 0$ и формулой $u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Посчитайте несколько первых членов, сделайте предположение о рекуррентном выражении u_n и затем докажите его.

Задача 4.9. Последовательность (u_n) задаётся первым членом $u_0 = 1$ и формулой $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6) \;\; \forall n \in N$. Докажите, что $\forall n \in \mathbb{N} : \; u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$.

Задача 4.10. Последовательность (u_n) задаётся первыми членами $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 2$ и формулой $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n \quad \forall n \in N$. Посчитайте несколько первых членов, сделайте предположение о рекуррентном выражении u_n и затем докажите его.

Задача 4.11. Даны натуральные числа $x_1, \ldots, x_n$. Доказать, что число $(1 + x_1)^2 \ldots (1 + x_n^2)$ можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел.

Задача 4.12. Елпидифор обладает талантом: на любом отрезке он может отмечать точки, делящие отрезок в отношении $n : (n + 1)$ для любого натурального n. Он полагает, что этого таланта достаточно, чтобы разделить отрезок в произвольно заданном рациональном отношении. Подтвердите это или опровергните это.

Задача 4.13. Вычислите произведение

$$\frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \ldots \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}.$$

Задача 4.14. Числовая последовательность $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ определена равенствами $A_1 = 1$, $A_2 = -1$, $A_n = -A_{n-1} - 2A_{n-2} (n \geqslant 3)$. Докажите, что при любом натуральном n число $2^{n+2} - 7A_n^2$ является полным квадратом.

Задача 4.15. Доказать, что любое число 2^n, где $n = 3, 4, 5, \ldots$ можно представить в виде $7x^2 + y^2$, где x и y — нечётные числа.

Задача 4.16. На бобриный праздник все пришли с уникальными деревяшками. Бобры любят дарить друг другу подарки и каждый готов подарить другому все свои деревяшки или любую их часть. Старейшина считает, что если какой-то набор уже кому-то дарили, то дарить точно такой-же другому бобру нельзя. Можете посчитать, сколько различных наборов может быть подарено?