Математические основы информатики

Индукция.

Сергей Леонидович Бабичев

Theorem (Метод математической индукции)

Дана последовательность высказываний X_n такая, что X_1 истино и $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n \to X_{n+1}$ истинны. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n$ истино.

- Утверждение X_1 называется *базой индукции*, а $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n \to X_{n+1}$ — *шагом индукции*.
- Сначала проверяется истинность базы: если же X_1 ложно, то даже если переход верен, то X_2 может быть как верным, так и неверным.
- Затем доказывается шаг индукции. Здесь мы пользуемся техникой доказательства импликации $X \to Y$ и в предположении X доказываем Y.
- В данном случае это означает, что в *предположении индукции* X_n мы доказываем X_{n+1}.
- Важно отметить, что все утверждения $X_n \to X_{n+1}$ доказываются одновременно: чтобы индукция сработала, *все* импликации $X_n \to X_{n+1}$ должны быть верны.

Example

Докажите, что при всех натуральных n выполняется тождество

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Решение.

- Индукция по n. При $n = 1$ имеем $1 \cdot 1! = (1+1)! - 1$, база установлена.
- Переход индукции: для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место следствие

$$1 \cdot 1! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \Rightarrow 1 \cdot 1! + \cdots + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+2)! - 1.$$

- Сравним приращения левой и правой частей и покажем, что они равны.
- Приращение левой части равно $(n+1) \cdot (n+1)!$, в то время, как приращение правой части равно

$$(n+2)! - 1 - ((n+1)! - 1) = (n+2)! - (n+1)! = (n+1)! \cdot (n+2-1) = (n+1) \cdot (n+1)!$$

- Переход доказан, задача решена.

- Доказать переход вида $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n \to X_{n+1}$ иногда трудно: предположения истинности X_n может быть недостаточно.
- Имеется *метод полной математической индукции*, в котором истинность X_{n+1} доказывается в предположении истинности $X_1, \dots X_n$.

Theorem (Метод полной математической индукции)

Дана последовательность высказываний X_n такая, что утверждение $\forall n \in \mathbb{N} \quad (\forall k \leqslant n \ X_n) \to X_{n+1}$ истинно. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n$ истино.

- База индукции уже зашита в «усиленное» предположение индукции: истинность X_1 следует из истинности $\forall k < 1 \quad X_k$, которое автоматически выполняется — не существует натуральных чисел, меньших 1.
- Далее истинность X_1 влечет истинность X_2. Так как $X_1 \wedge X_2$ истинно, то X_3 верно и т.д.

Example

Известно, что число $x + \dfrac{1}{x}$ является целым. Докажите, что при любом натуральном n число $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ также является целым.

Решение.

- Воспользуемся методом полной математической индукции. Предполагая, что при всех $k \leqslant n$ число $x^k + \frac{1}{x^k}$ целое, покажем, что $x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}}$ также целое.
- Действительно,

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

В силу предположения индукции $x^n + \dfrac{1}{x^n}$, $x + \dfrac{1}{x}$ и $x^{n-1} + \dfrac{1}{x^{n-1}}$ целые, таким образом, $x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}}$ также целое.

$\square$

Ещё одно применение метода математической индукции — вывод и доказательство тождеств.

Example

Упростите выражение $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

Решение.

- У нас не спрашивают, можно ли упростить данное выражение, а приказывают сделать это — значит, это возможно.
- Действия: только сложения и возведения в квадрат $\to$ результат будет многочленом.
- Так как складывается n выражений, каждое из которых доходит до 2 степени, итоговая степень не может превосходить третью.
- Предположим, что упрощённое выражение может быть представлено в виде

$$a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + cn + d.$$

$\square$

- Если данное выражение является упрощённым выражением исходного, то равенство $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + cn + d$ верно для любого n.
- Для того, чтобы найти все 4 переменные, нам потребуется не менее 4-х уравнений.
- Подставим значения n от 1 до 4:

$$\begin{cases} 1^2 = a + b + c + d, \\ 1^2 + 2^2 = 8a + 4b + 2c + d, \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 = 27a + 9b + 3c + d, \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 64a + 16b + 4c + d. \end{cases}$$

- Решив систему, получим набор коэффициентов $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$, $d = 0$.
- Искомое выражение после разложения на множители:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- Докажем тождество

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

по индукции.

- База индукции выполняется при $n = 1$, действительно:

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}.$$

- Переход: n-е утверждение формулируется так:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$n + 1$-е утверждение:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}.$$

- Пользуясь n-м утверждением, докажем $n+1$-е.
- Сумма квадратов первых n чисел равна $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, отсюда:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \\
\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)(n+1)}{6} &= \\
\frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1)}{6} &= \\
\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6}{6} &= \\
\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} &= \\
\frac{(n+1)((n+1)+1)(2(2n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

Применимость метода

Example

Любые n лошадей одного цвета.

Решение.

- База: любая лошадь одного цвета сама с собой.
- Переход: Утверждение n: любые n лошадей одного цвета. Отсюда докажем, что любые $n+1$ лошадь одного цвета.
- Действительно:рассмотрим любые $n+1$ лошадей: $Л_1, Л_2, \ldots, Л_n, Л_{n+1}$. По предположению индукции, лошади из множества $\{Л_1, \ldots, Л_n\}$ — одного цвета, так же как и лошади из множества $\{Л_2, \ldots Л_{n+1}\}$ также одного цвета. Но лошадь $Л_2$ находится в обоих множествах, значит и все $n+1$ лошади одного цвета.

$\square$

Применимость метода

- Переход, например, $X_5 \to X_6$, действительно, верен.
- Ошибка: переход $X_1 \to X_2$ неверен.
- Рассматриваемые множества после вычитания одной лошади вообще не пересекаются.
- Верны все переходы $X_2 \to X_3, X_3 \to X_4, \ldots$.
- Но первое домино упало, но не задело второе, и цепочка прервалась.

Example

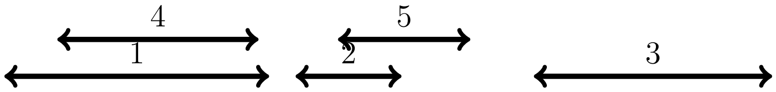
В пруду завелось $2n$ бобров. Некоторые из них знакомы между собой. Местный лесник, наблюдая за бобрами, обнаружил, что пар знакомых бобров всего $n^2 + 1$. Докажите, что среди бобров есть трое попарно знакомых между собой ($n \geqslant 2$).

Решение.

- База $n = 2$ очевидна.
- Разобьём бобров на две группы: два и $2(n-1)$ бобра.
- По предположению индукции, если среди $2(n-1)$ бобров есть хотя бы $(n-1)^2 + 1$ пар, то образуется тройка.
- Допустим это не так, и пар среди этой группы бобров не более $(n-1)^2$.
- Тогда получим не менее $(n^2+1) - (n-1)^2 = 2n$ пар знакомств, включающих тех двух бобров из отдельной группы.
- Если эти два бобра знакомы, тогда в сумме они знакомы ещё с $2n-1$ бобром, но по принципу Дирихле найдётся треугольник.
- Если это не так, то любые два бобра, выбранные нами в начале произвольным образом, не знакомы, противоречие.

Example (Задача об интервалах)

На прямой дано множество отрезков. Необходимо найти максимальное по размеру множество непересекающихся отрезков



Задача об интервалах

Предлагается рассмотреть следующий вариант решения:

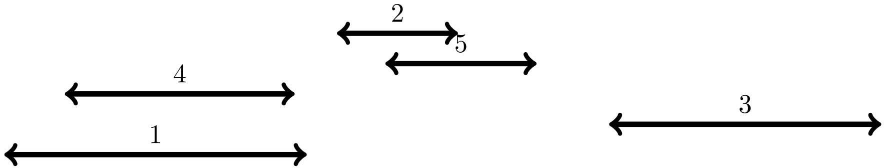
- упорядочить отрезки по какому-либо признаку.
- рассматриваем отрезки по-одному. Если он не перекрывается с каким-либо из уже внесённым в выходное множество, то добавляем её в это множество.

Принципов упорядочивания может быть несколько. Не все одинаково полезны.

- Два этапа поиска:
  1. Находим правдоподобную стратегию.
  2. Доказываем её корректность.

Задача об интервалах

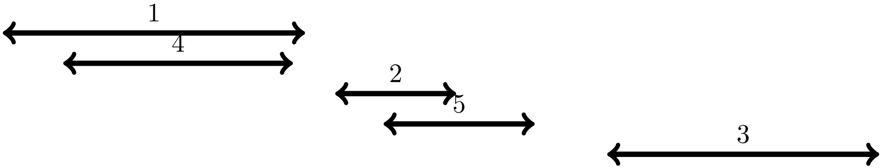
По размеру. Сначала выберем самые короткие отрезки.



Задача об интервалах

По длительности: итоговая расстановка:

Задача об интервалах



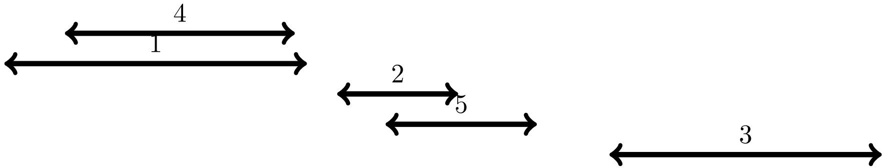
По левой границе.

Задача об интервалах

Итоговая расстановка:

Задача об интервалах

По правой границе.

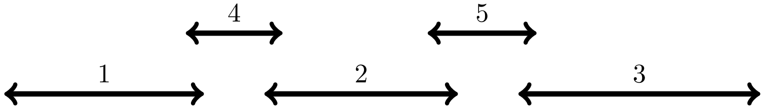


Задача об интервалах

Итоговая расстановка

Задача об интервалах

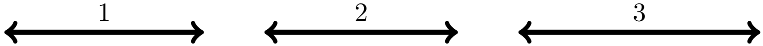
Как будто, все способы упорядочивания годятся?
А что насчёт такой расстановки?



Задача об интервалах

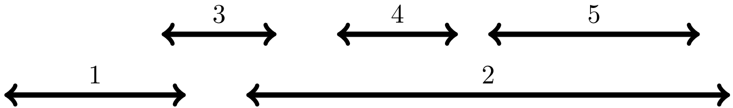
Сначала самые короткие:

По левой границе и по правой границе:



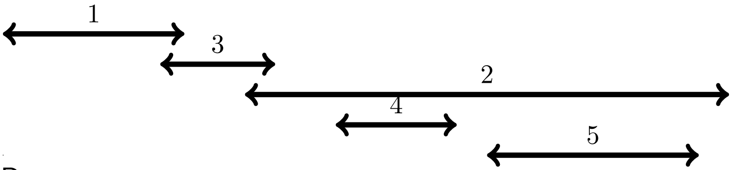
Первый вариант не всегда даёт точное решение.
Поиск контрпримера: мы хотим найти опровергающий какую-либо гипотезу вариант (*зелёную ворону*).

Рассмотрим следующее расположение отрезков:



Задача об интервалах

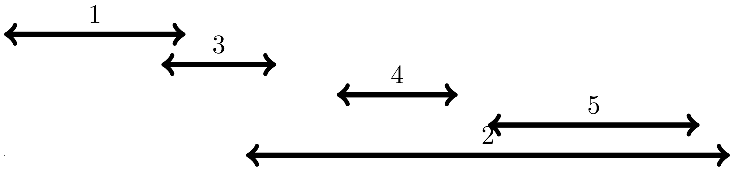
Упорядочивание по началу отрезка даёт нам:



Решение:

Задача об интервалах

Упорядочивание по концу отрезка даёт нам:



И это приводит к верному решению:

Задача об интервалах

Как доказать, что данный алгоритм верно решает задачу? Индукцией.

1. База: множество из одного отрезка есть оптимальное решение.
2. Переход: доказать, что выбранный отрезок принадлежит какому-либо оптимальному множеству.
3. Первый шаг — доказательство того, что существует оптимальное подмножество отрезков, которое содержит первый отрезок, получившийся при применении нашего алгоритма.
4. Если в некотором оптимальном подмножестве мы поменяем отрезок с минимальным значением конца на первый, то количество отрезков в подмножестве не изменится и подмножество останется решением.
5. Таким образом, существует оптимальное подмножество, содержащее первый отрезок.
6. Второй шаг — удаляем из множества отрезков все отрезки, пересекающиеся с первым.
7. Третий шаг — повторяем алгоритм для усечённого множества, в котором находится первый отрезок.