Математические основы информатики

Комбинаторика-II.

Сергей Леонидович Бабичев

Воспоминания из теории множеств

Напоминания:

$$[m]_n = m(m-1)\dots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!} = A_m^n$$

$$[m]^n = (m)(m+1)\dots(m+n-1) = [m+n-1]_n = \frac{(m+n+1)!}{(m-1)!}$$

Воспоминания о теории множеств

Theorem

Число инъективных отображений множества $X : |X| = n$ в множество $Y : |Y| = m$ равно $[m]_n$.

Доказательство.

Определим число инъекций $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$
y_1 выбирается m способами. y_i выбирается из элементов $Y \setminus \{y_1, \ldots, y_{i-1}\}$.
Результат: $[m]_n = m(m-1)\ldots(m-n-1)$.

$\square$

Числа Стирлинга первого рода

- Для $x \in \mathbb{R}$ $[x]_n$ — полином степени n.
- $x_n = s(n,0)x^0 + s(n,1)x^1 + \cdots + s(n,n)x^n$
- Числа $s(n,k)$ — числа Стирлинга первого рода.
- Они возникли как результат определения количество инъекций на множествах.
- Подробнее рассмотрим их в рекуррентах.

Вариант задачи Муавра

Задача. Имеется уравнение

$$x_1 + x_2 + .. + x_m = n.$$

Определить количество решений этого уравнения в целых положительных числах.

Вариант задачи Муавра

Задача. Имеется уравнение

$$x_1 + x_2 + .. + x_m = n.$$

Определить количество решений этого уравнения в целых положительных числах.
Решение:

- Мы знаем её как вариант задачи о шарах и перегородках.
- Её решение C_{n-1}^{m-1} — число сочетаний.

Задача Муавра

Задача. Имеется уравнение

$$x_1 + x_2 + .. + x_m = n.$$

Определить количество решений этого уравнения в целых неотрицательных числах.

Задача Муавра

Задача. Имеется уравнение

$$x_1 + x_2 + .. + x_m = n.$$

Определить количество решений этого уравнения в целых неотрицательных числах. **Решение:**

- Это — другой вариант задачи о перегородках.
- Её решение C_{n+m-1}^{m-1}.
- Другое название — число сочетаний с повторениями $\overline{C}_n^{m-1} = C_{n+m-1}^{m-1}$.

Свойства сочетаний

Задача. Доказать $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

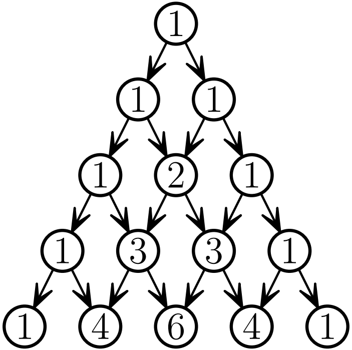
Свойства сочетаний

Задача. Доказать $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ **Решение:**

- Разобьём все C_n^k сочетаний из n элементов $a_1, \ldots, a_n$ на два непересекающихся множества — содержащих элемент a_1 и не содержащих его.
- Размер первого множества — $n-1$ элемент, сочетающихся элементов — $k-1$. Всего в первом множестве C_{n-1}^{k-1} элементов.
- Размер второго — $n-1$ элемент, число сочетающихся элементов — k. Во втором множестве C_{n-1}^k элементов.
- Каждое сочетание принадлежит ровно одному множеству.

Треугольник Паскаля

- Полученное свойство позволяет формировать таблицу сочетаний — треугольник Паскаля.
- Этот треугольник был известен Никколо Тартальe в Италии почти за сто лет до рождения Паскаля.
- До Тартальи он был известен арабам в 13 веке.



Бином Ньютона

Theorem

$$(a+b)^n = C_n^n a^n b^0 + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^0 a^0 b^n.$$

Доказательство.

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb.$$

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n},$$

Записываем получающиеся одночлены как слова длины n, состоящие из букв a и b. После приведения подобных членов слагаемое $a^{n-k}b^k$ дадут те и только те слова, которые составлены из k букв b и $n-k$ букв a. Таких слов C_n^k; это и будет коэффициент при $a^{n-k}b^k$ в получившейся сумме. □

Несколько интересных свойств

Задача. Найти сумму

$$S = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n.$$

Несколько интересных свойств

Задача. Найти сумму

$$S = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n.$$

Решение:

- Рассмотрим последовательность длины n, состоящую из 0 и 1. Это булеан мощностью 2^n.
- С другой стороны, если нулей не будет вовсе, то это C_n^0;
- при одном нуле — C_n^1, и т.д.
- Таким образом число таких последовательностей равно

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n.$$

Несколько интересных свойств

Задача. Найти сумму

$$S = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n.$$

Решение:

- Рассмотрим последовательность длины n, состоящую из 0 и 1. Это булеан мощностью 2^n.
- С другой стороны, если нулей не будет вовсе, то это C_n^0;
- при одном нуле — C_n^1, и т.д.
- Таким образом число таких последовательностей равно

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n.$$

Другой вариант: $(1+1)^n = 2^n$.

Несколько интересных свойств

Задача. Найти сумму

$$S = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots$$

Несколько интересных свойств

Задача. Найти сумму

$$S = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots$$

Решение:

$$C_n^0 = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1$$

$$C_n^2 = C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3$$

$$\dots$$

Итого

$$S = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots = 2^{n-1}$$

Несколько интересных свойств

Задача. Найти сумму

$$0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \dots + n \cdot C_n^n$$

Несколько интересных свойств

Задача. Найти сумму

$$0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \cdots + n \cdot C_n^n$$

Решение:

- Рассмотрим все сочетания без повторений и разобьём их на группы по числу элементов.
- Если в сочетании ровно k элементов, то таких групп C_n^k и их общий размер $k \cdot C_n^k$ и общее число $0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \cdots + n \cdot C_n^n$.
- Если предмет a_i находится в некоторых группах, то остальные $n-1$ образуют сочетания, число которых 2^{n-1} и общее число $n \cdot 2^{n-1}$.
- Итого
$$0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \cdots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$$

Несколько интересных свойств

Задача. Найти

$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \cdots + C_{n+m-1}^n$$

Решение:

Несколько интересных свойств

Задача. Найти
$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \dots + C_{n+m-1}^n$$

Решение:

- Рассмотрим сочетания с повторениями из $n+1$ букв по m.
- Число их $\overline{C}_{n+1}^m = C_{n+m}^m$.
- Дизъюнктивно разобьём их на классы множеств по факту количества раз вхождения первой буквы ровно k раз.
- Остальные $m-k$ позиций заняты оставшимися n буквами.
- Класс k содержит сочетания с повторениями из n элементов по $m-k$ есть $\overline{C}_n^{m-k} = C_{n+m-k-1}^{m-k}$.
- Общее количество таких сочетаний
$$C_{n+m-1}^m + C_{n+m-2}^{m-1} + \dots + C_n^1 + C_{n-1}^0$$
- С другой стороны оно равно C_{n+m}^n.

- Пока доказано утверждение

$$C_{n+m-1}^{m} + C_{n+m-2}^{m-1} + \cdots + C_{n}^{1} + C_{n-1}^{0} = C_{n+m}^{m}$$

- Заменим n на $n+1$ и m на $m-1$.

$$C_{n+m-1}^{m-1} + C_{n+m-2}^{m-2} + \cdots + C_{n+1}^{1} + C_{n}^{0} = C_{n+m}^{m}$$

- Вспомним, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

$$C_{n+m-1}^{n+m-1-m+1} + C_{n+m-2}^{n+m-2-m+2} + \cdots + C_{n+1}^{n+1-1} + C_{n}^{n-0} = C_{n+m}^{m}$$

- Сокращаем и разворачиваем:

$$C_{n}^{n} + C_{n+1}^{n} + C_{n+2}^{n} + \cdots + C_{n+m-1}^{n} = C_{n+m}^{m} \qquad (1)$$

Формула включений-исключений

- Пусть рассматривается некоторый набор объектов. Этому набору соответствует некоторый набор свойств $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
- Каждый объект может как обладать любым из указанных свойств, так и не обладать.
- Например, если α_1 — свойство делимости числа на 3, а α_2 — свойство числа быть полным квадратом, то число 16 не обладает первым свойством, но обладает вторым.
- Пусть N — конечное общее количество объектов, $N(\alpha_k)$ — количество объектов, обладающих k-ым свойством.
- Пусть $N(\alpha_k, \alpha_l)$ — количество объектов, обладающих k-ым и l-ым свойствами.
- Подобным образом определяем количество объектов, обладающих сразу тремя, четырьмя, и так далее, вплоть до всех n, свойствами.

- Тогда количество объектов, которые не обладают ни одним из свойств (обозначается как $N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2, \ldots}, \overline{\alpha_n}))$ можно найти по формуле включений-исключений:

$$\begin{aligned} N(\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_n}) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - \cdots - N(\alpha_n) + \\ + N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + \cdots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) - \\ - N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \ldots + (-1)^n \cdot N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Формула включений-исключений

- Какие именно свойства нужно рассматривать?
- Нужно, чтобы эти свойства были бинарными и взаимоисключаемыми.
- На вопрос: обладает ли объект свойством, должен быть ровно один из ответов: «да» или «нет».
- Делимость на 3 таковым свойством является.
- Остаток при делении на 3 — нет.

Формула включение-исключений: доказательство

- База индукции — одно свойство. Каждый предмет либо обладаем свойством, либо не обладает (бинарный принцип). $N(\alpha_1) = N - N(\overline{\alpha_1})$.
- Предположим, что формула 2 доказана для числа свойств $n-1$.

$$
\begin{aligned}
N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_{n-1}}) = \\
N - N(\alpha_1) - \cdots - N(\alpha_{n-1}) + \\
+N(\alpha_1, \alpha_2) + \cdots + N(\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}) - \\
-N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \cdots - N(\alpha_{n-3}, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}) + \\
+ \cdots + \\
(-1)^{n-1} N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Формула включение-исключений: доказательство

- Рассмотрим множество, включающее в себя все предметы, обладающее свойством α_n.
- Его размер $N(\alpha_n)$.
- Ещё имеется $n-1$ свойство, для которых по предположению индукции верно (3). Берутся лишь предметы, обладающие α_n:

$$\begin{aligned}
N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_{n-1}}, \alpha_n) = \\
N(\alpha_n) - N(\alpha_1, \alpha_n) - \cdots - N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) + \\
+N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n) + \cdots + N(\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n) - \\
-N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_n) - \cdots - N(\alpha_{n-3}, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n) + \\
+ \cdots + \\
(-1)^{n-1} N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n).
\end{aligned} \tag{4}$$

Формула включение-исключений: доказательство

- Вычитаем из формулы 3 формулу 4.
- Получаем правую часть 2.
- В левой части — разность

$$N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_{n-1}}) - N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_{n-1}}, \alpha_n). \tag{5}$$

- $N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_{n-1}})$ — число предметов, не обладающих свойствами $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ и, может быть, обладающих свойством α_n.
- $N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_{n-1}}, \overline{\alpha_n})$ — число предметов, не обладающих свойствами $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ и точно обладающих свойством α_n.
- Их разность равна числу предметов, которые не обладают ни одним из свойств $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

$$N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_{n-1}}) - N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_{n-1}}, \alpha_n) = N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_{n-1}}, \overline{\alpha_n})$$

Задача о счастливых билетах

Задача. Билет — это последовательность из 6 цифр. Билет называется счастливым, если сумма его первых трёх цифр равна сумма последних трёх. Какое существует количество счастливых билетов?

- Нужно найти количество таких наборов цифр $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, для которых $a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5 + a_6$.
- Имеются ограничения: $0 \leqslant a_i \leqslant 9$.

Задача о счастливых билетах

- Переформулируем: нужно определить размер некоего множества A, кортежи $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ которого обладают заданным свойством.
- Введём множество B кортежей $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ такое, что

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_1 \\
b_2 &= a_2 \\
b_3 &= a_3 \\
b_4 &= 9 - a_4 \\
b_5 &= 9 - a_5 \\
b_6 &= 9 - a_6
\end{aligned}$$

Задача о счастливых билетах

- Отображение множества A на множество B биективно.
- Кортежи множества B обладают следующим свойством:

$$\begin{aligned}
b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 &= \\
a_1 + a_2 + a_3 + 9 - a_4 + 9 - a_5 + 9 - a_6 &= \\
(a_1 + a_2 + a_3) - (a_4 + a_5 + a_6) + 27 &= \\
(a_1 + a_2 + a_3) - (a_1 + a_2 + a_3) + 27 &= 27.
\end{aligned}$$

и ограничениями $0 \leqslant b_i \leqslant 9$.

Задача о счастливых билетах

- Введём свойство $\alpha_i = b_i > 9$
- Тогда $N(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) = 0$
- Это же верно для 4,5 и 6.

$$
\begin{aligned}
N(\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_6}) = N - \\
-N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) - N(\alpha_4) - N(\alpha_5) - N(\alpha_6) + \\
+N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + N(\alpha_1, \alpha_4) + N(\alpha_1, \alpha_5) + N(\alpha_1, \alpha_6) + \\
+N(\alpha_2, \alpha_3) + N(\alpha_2, \alpha_4) + N(\alpha_2, \alpha_5) + N(\alpha_2, \alpha_6) + \\
+N(\alpha_3, \alpha_4) + N(\alpha_3, \alpha_5) + N(\alpha_3, \alpha_6) + \\
+N(\alpha_4, \alpha_5) + N(\alpha_4, \alpha_6) + \\
N(\alpha_5, \alpha_6) = \\
N - C_6^1 \cdot N(\alpha_1) + C_6^2 \cdot N(\alpha_1, \alpha_2).
\end{aligned}
$$

Задача о счастливых билетах

- $N = C_{27+6-1}^{6-1} = C_{32}^{5}$ (задача Муавра).
- Ищем $N(\alpha_1)$.
- Это — число решений системы

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 27 \\ b_1 > 9 \\ b_2 \geqslant 0 \\ b_3 \geqslant 0 \\ b_4 \geqslant 0 \\ b_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

- Снова замена: $c_1 = b_1 - 10$.
- Тогда $c_1 \geqslant 0$.
- Новая задача Муавра

$$c_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 17$$

Задача о счастливых билетах

- $N(\alpha_1) = C_{17+6-1}^{6-1} = C_{22}^{5}$.
- Как получить $N(\alpha_1, \alpha_2)$?

Задача о счастливых билетах

- $N(\alpha_1) = C_{17+6-1}^{6-1} = C_{22}^{5}$.
- Как получить $N(\alpha_1, \alpha_2)$?
- Сделав подстановки $c_1 = b_1 - 10$ и $c_2 = b_1 - 10$.
- Приходим у задаче Муавра

$$c_1 + c_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 7$$

- $N(\alpha_1, \alpha_2) = C_{7+6-1}^{6-1} = C_{12}^{5}$.
- Итого

$$N = C_{32}^{5} - 6 \cdot C_{22}^{5} + 15 \cdot C_{12}^{5} = 55252$$

Задача о делителях

Задача. Пусть $N = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3}$. Найти количество чисел, меньших N и взаимно простых с ним.

Задача о делителях

Задача. Пусть $N = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3}$. Найти количество чисел, меньших N и взаимно простых с ним.

- Какие зафиксировать свойства для сведения к задаче включений/исключений?
- Очевидно, делимости. α_1 — делимость числа на β_1, аналогично α_2 и α_3.
- Число будет взаимно простым с числом N, если оно не имеет с ним ни одного общего делителя, то есть не обладает ни одним из свойств α_1, α_2 и α_3, поэтому требуется найти $N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3})$.

Задача о делителях

- По формуле включений-исключений для трёх свойств:

$$N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_3}, \overline{\alpha_3}) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) +$$

$$+N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_2, \alpha_3) + N(\alpha_1, \alpha_3) - N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

- $N(\alpha_1)$: — количество чисел, меньших N, и делящихся на p_1: $N(\alpha_1) = \dfrac{N}{p_1}$, каждое p_1-ое число делится на p_1.
- Аналогично, $N(\alpha_2) = \dfrac{N}{p_2}$; $N(\alpha_3) = \dfrac{N}{p_3}$; $N(\alpha_1, \alpha_2) = \dfrac{N}{p_1 p_2}$; $N(\alpha_1, \alpha_3) = \dfrac{N}{p_1 p_3}$; $N(\alpha_2, \alpha_3) = \dfrac{N}{p_2 p_3}$; $N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \dfrac{N}{p_1 p_2 p_3}$.
-

Задача о делителях

- Отсюда:

$$N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_3}, \overline{\alpha_3}) = N - \frac{N}{p_1} - \frac{N}{p_2} - \frac{N}{p_3} + \frac{N}{p_1 p_2} + \frac{N}{p_1 p_3} + \frac{N}{p_2 p_3} - \frac{N}{p_1 p_2 p_3} =$$

$$= N\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_3}\right)$$

Задача о беспорядках

Задача. Войдя в ресторан, 5 гостей оставили швейцару свои шляпы, а на выходе получили их обратно. Швейцар раздал шляпы случайным образом. Сколько существует вариантов, при которых каждый гость получит чужую шляпу?

Задача о беспорядках

Задача. Войдя в ресторан, 5 гостей оставили швейцару свои шляпы, а на выходе получили их обратно. Швейцар раздал шляпы случайным образом. Сколько существует вариантов, при которых каждый гость получит чужую шляпу?

- Опять ищем свойства.
- Пусть свойство α_k будет означать, что гость номер k получил свою шляпу.
- Тогда требуется найти $N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}, \overline{\alpha_4}, \overline{\alpha_5})$ — количество способов, в которых ни один из гостей не получил свою шляпу.

Задача о беспорядках

- $N = 5!$: всего существует $5!$ способов раздать шляпы людям, не обращая внимания, кто из них чью получил.
- $N(\alpha_1) = 4!$: количество способов, когда первый получил свою шляпу. Тогда требуется раздать остальные 4 шляпы 4 людям, что можно сделать $4!$ способами.
- Аналогично $N(\alpha_2) = N(\alpha_3) = N(\alpha_4) = N(\alpha_5) = 4!$.
- $N(\alpha_1, \alpha_2) = 3!$ — количество способов раздать шляпы так, чтобы первый и второй получили свои шляпы.
- Тогда нужно раздать 3 оставшиеся шляпы 3 людям, что можно сделать $3!$ способами.
- Аналогично, $N(\alpha_k, \alpha_j) = 3!$ для любой пары человек. Всего существует C_5^2 пар человек.

Задача о беспорядках

- $N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2!$, и существует C_5^3 троек человек;
- $N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$=$1!$, и всего существует C_5^4 четвёрок человек;
- $N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 0! = 1.$
- Формула включений-исключений:

$$N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}, \overline{\alpha_4}, \overline{\alpha_5}) = N - C_5^1 N(\alpha_1) + C_5^2 N(\alpha_1, \alpha_2) - C_5^3 N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) +$$

$$+ C_5^4 N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) - C_5^5 N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) =$$

$$= 120 - 5 \cdot 24 + 10 \cdot 6 - 10 \cdot 2 + 5 \cdot 1 - 1 = 44$$