

## 9 Теория чисел 9

**Задача 9.1.** Будем называть число *совершенно простым*, если при любой перестановке его цифр образуется совершенно простое число. Докажите, что в записи такого числа не может быть более трёх различных цифр.

**Задача 9.2.** Можно ли вычеркнуть из произведения  $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 100!$  один из факториалов так, чтобы произведение оставшихся было квадратом целого числа?

**Задача 9.3.** Алгоритмом Гарнера решите систему

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \\ x \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$$

**Задача 9.4.** Обозначим за  $\xi(n)$  сумму делителей числа  $n$ , а за  $\psi(n)$  — число делителей числа  $n$ . Докажите, что функции  $\xi(n)$  и  $\psi(n)$  мультипликативны.

**Задача 9.5.** Пусть  $z \in \mathbb{P}$ ,  $z > 2$ . Имеется  $p - 1$  целых чисел, не делящихся на  $p$ . Числа можно заменять на противоположные. Докажите, что существует такое множество замен, что сумма получившихся чисел будет кратна  $p$ .

**Задача 9.6.** Докажите, что

$$\sum_{a=1}^{p-1} \left( \frac{a}{p} \right) = 0$$

для  $p \in \mathbb{P}$  и  $a$  пробегает полную систему вычетов по модулю  $p$ .

**Задача 9.7.** а) Найдите наименьший первообразный корень по модулю 23.

б) Используя результаты п. а) получите все квадратичные вычеты по модулю 23.