10 Теория вероятности

Задача 10.1. Имеется 3 двери, за двумя из которых находится коза, а за третий — автомобиль. Мы выбираем дверь, а ведущий открывает одну из двух оставшихся и показывает, что там находится коза. Имеет ли смысл менять дверь?

Задача 10.2. В помещении находится n человек. Какова вероятность того, что у двух из них день рождения в один день? Найти минимальное количество человек, чтобы эта вероятность была больше 50%.

Задача 10.3. Есть n частиц, их нужно разместить по N ячейкам, $N > n$. Сколькими способами это можно сделать, и какая вероятность размещения, если:
а) В заранее определённых n ячейках будет по 1-ой частице.
б) В каких-то n ячейках по 1-ой частице.
Разберите случаи, когда частицы различны или одинаковы и когда выполняется принцип запрета Паули — в каждом ящике может быть 1 или 0 частиц.

Комментарий: Статистика Больцмана — частицы различимы между собой, статистика Бозе-Эйнштейна — частицы становятся тождественными, статистика Ферми-Дирака — должен выполнятся принцип запрета Паули.

Задача 10.4. Игроки A и B бросают справедливую монетку. Игрок, выигравший свою партию получает очко, проигравший — ничего.

Соревнование было прервано, когда A не хватило двух очков, B — трёх очков. Как поделить ставку?

Задача 10.5. Рассматриваются семьи, содержащие двух детей. Положим, рождение девочки и мальчика одинаково вероятно.

1. Если известно, что в выбранной наудачу семье есть мальчик, какова вероятность того, что и второй ребёнок мальчик?

2. При условии, что выбранный наудачу из этих семей ребёнок является мальчиком, какова вероятность того, что и другой ребёнок в семье — мальчик?

Задача 10.6. Из 2^N множеств, совокупности всех подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ случайно и независимо выбираются 2 множества A и B. Найти вероятность, что A и B не пересекаются.

Задача 10.7. В аудитории находится невеста, которая хочет выбрать себе жениха. За дверью выстроилась очередь из N женихов. Относительно любых двух женихов невеста может сделать вывод, какой из них для неё предпочтительнее. Таким образом, невеста задаёт на множестве женихов отношение порядка (естественно считать, что если A предпочтительнее B, а B предпочтительнее C , то A предпочтительнее C). Предположим, что все $N!$ вариантов очередей равновероятны и невеста об этом знает (равно, как и число N). Женихи запускаются в аудиторию по очереди. Невеста видит каждого из них в первый раз! Если на каком-то женихе невеста остановится (сделает свой выбор), то оставшаяся очередь расходится. Невеста хочет выбрать наилучшего жениха (исследуя k–го по очереди жениха, невеста лишь может сравнить его со всеми предыдущими, которых она уже просмотрела и пропустила). Оцените (при $N \to \infty$) вероятность того, что невесте удастся выбрать наилучшего жениха, если она придерживается следующей стратегии: просмотреть (пропустить) первых по очереди $[N/e]$ кандидатов и затем выбрать первого кандидата, который лучше всех предыдущих (впрочем, такого кандидата может и не оказаться, тогда, очевидно, невеста не смогла выбрать наилучшего жениха).

Задача 10.8. Имеется два игрока: у игрока A вначале a рублей, у игрока B — b рублей. Они бросают монетку, вероятность выигрыша первого игрока для которой равна p, и выигравший получает рубль. Найти вероятность разорения игрока A.

Задача 10.9. На первом этаже семнадцатиэтажного общежития в лифт вошли десять человек. Предполагая, что каждый из вошедших может с равной вероятностью жить на любом из шестнадцати этажей (со 2-го по 17-ый), найдите среднее число остановок лифта.