Математические основы информатики

Теория вероятности.

Сергей Леонидович Бабичев

Элементарная теория вероятности. Аксиоматика.

Пусть Ω — множество элементов ω, *элементарных событий*, а $\mathbb{F}$ — множество подмножеств из Ω. Элементы множества $\mathbb{F}$ — *случайные события*, а Ω — *пространство элементарных событий*.

1. $\mathbb{F}$ является алгеброй множеств.
2. Каждому множеству A из $\mathbb{F}$ поставлено в соответствие неотрицательное $P(A) \in \mathbb{R}$. Оно называется *вероятностью события* A.
3. $P(\Omega) = 1$.
4. Если $A \cap B = \emptyset$, то
$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Совокупность $\Omega, \mathbb{F}, P$, удовлетворяющая 1-4, называется *полем вероятностей.*.
Система аксиом 1-4 непротиворечива. Но она не является *полной*.

Пример построения поля вероятностей

- Берётся прозвольное конечное множество $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ и и произвольное множество $\{p_1, \ldots, p_k\}, p_i \in \mathbb{R}, p_i \geqslant 0 : p_1 + \cdots + p_k = 1$.
- За $\mathbb{F}$ принимается совокупность всех подмножеств A их Ω и для $A = \omega_{i_1}, \cdot, \omega_{i_\lambda}$ полагается $P(A) = p_{i_1} + \cdots + p_{i_\lambda}$.
- $p_1, \ldots, p_k$ суть вероятности элементарных событий $\omega_1, \ldots, \omega_k$ или *элементарные вероятности*.

Теория множеств	Случайные события
A и B не пересекаются	A и B несовместны
$A \cap B \cdots \cap N = X$	Событие X — одновременная реализация $A, B, ...N$.
$A \cup B \cdots \cup N = X$	Событие X — наступление хотя бы одно их $A, B, ...N$.
$\overline{A}$	Ненаступление события A.
$A = \emptyset$	A невозможно.
$A = \Omega$	A должно наступить с необходимостью.
B является подмножеством A	Из осуществления B следует с необходимостью осущ. A.

Следствия из аксиом

Из $A+\overline{A}=\Omega$ и аксиом 3-4:

$$P(A)+P(\overline{A})=1, \tag{1}$$

$$P(\overline{A})=1-P(A). \tag{2}$$

$$P(\emptyset)=0. \tag{3}$$

Если $A, B, \ldots, N$ несовместны, то из аксиомы 4:

$$P(A+B+\ldots N)=P(A)+P(B)+\cdots+P(N). \tag{4}$$

Задача. (Задача Стефана Банаха). В двух спичечных коробках имеется по n спичек. На каждом шаге наугад выбирается коробок, и из него удаляется (используется) одна спичка. Найдите вероятность того, что в момент, когда один из коробков опустеет, в другом останется k спичек.

Задача. (Задача Стефана Банаха). В двух спичечных коробках имеется по n спичек. На каждом шаге наугад выбирается коробок, и из него удаляется (используется) одна спичка. Найдите вероятность того, что в момент, когда один из коробков опустеет, в другом останется k спичек.

Решение: Рассмотрим процесс изъятия спичек из коробок как последовательность нулей и единиц (например, нули соответствуют спичкам первой коробки, единицы – второй коробки) длины $2n$, с числом нулей и единиц равным n. Общее число возможных исходов равно $N = C_{2n}^{n}$.

Исходы, удовлетворяющие условию задачи, устроены так: если сначала пустеет первый коробок, то на $2n-k$-м месте стоит нуль, а в первых $2n-k-1$ позициях имеется $n-1$ нулей в любом порядке. Аналогично, когда сначала пустеет второй коробок. Число таких исходов равно $m = 2C_{2n-k-1}^{n-1}$. Искомая вероятность равна

$$2\frac{C_{2n-k-1}^{n-k}}{C_{2n}^{n}} = \frac{C_{n}^{k}}{C_{2n-1}^{k}}.$$

Условная вероятность

Definition (Условная вероятность)

Если $P(A) > 0$, то частное

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \tag{5}$$

называют *условной вероятностью* события B при условии A.

$$P(AB) = P(B|A) \cdot P(A). \tag{6}$$

$$P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}) \tag{7}$$

Задача. [Шляпы] В гардеробе случайным образом перепутались N одинаковых шляп посетителей. Какова вероятность того, что хотя бы один посетитель получит свою шляпу?

Задача. [Шляпы] В гардеробе случайным образом перепутались N одинаковых шляп посетителей. Какова вероятность того, что хотя бы один посетитель получит свою шляпу?

Решение. Пусть A_k — событие, означающее, что k-ый посетитель получил свою шляпу.

Тогда:

$$\mathbb{P}(\overline{A_1 A_2} \dots \overline{A_n}) = 1 - \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_2) - \dots - \mathbb{P}(A_n) +$$

$$+ \mathbb{P}(A_1 A_2) + \mathbb{P}(A_1 A_3) + \dots + \mathbb{P}(A_{n-1} A_n) + \dots + (-1)^n \mathbb{P}(A_1 A_2 \dots A_n) =$$

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n} \approx \frac{1}{e}$$

События: пример

- Пусть имеется симметричная монета, идеальная игральная кость и колода карт для покера.
- Подбросим монету, бросим кость, извлечём карту.
- $A =$ выпала решка;
- $B =$ выпало 5 или 6;
- $C =$ извлечена пиковая масть.
- Количество испытаний для каждого случая равно 2,6 и 52 соответственно.
- Общее количество случаев равно $2 \cdot 6 \cdot 52$
- $|A| = 1 \cdot 6 \cdot 52$, $|B| = 2 \cdot 2 \cdot 52$, $|C| = 2 \cdot 6 \cdot 13$
- $|AB| = 1 \cdot 2 \cdot 52$, $|AC| = 1 \cdot 6 \cdot 13$, $|BC| = 2 \cdot 2 \cdot 13$.
- $|ABC| = 1 \cdot 2 \cdot 13$
- $|\Omega| = 2 \cdot 6 \cdot 52$

Вероятности событий

Разделив всё на $|\Omega|$ получим:

- $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(C) = \frac{1}{4}$,
- $P(AB) = \frac{1}{6}$, $P(AC) = \frac{1}{8}$, $P(BC) = \frac{1}{12}$, $P(ABC) = \frac{1}{24}$.
- Везде верны равенства $P(AB) = P(A)P(B)$ и так далее.

Ещё несколько формул

$$P(B|A) \geqslant 0, \tag{8}$$

$$P(\omega|A) = 1, \tag{9}$$

$$P(B + C|A) = P(B|A) + P(C|A) \tag{10}$$

- Сравнивая (8-10) с аксиомами $2 - 4$ видим, что система множеств $\mathbb{F}$ вместе с функцией множеств $P(B|A)$ при закреплённом A образует поле вероятностей.
- Все доказанные для $P(B)$ общие теоремы справедливы для условных вероятностей $P(B|A)$ при фиксированном событии A.

Теорема Байеса

Из

$$P(AB) = P(B|A) \cdot P(A),$$

и

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B),$$

получается

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} \tag{11}$$

которая содержит *теорему Байеса*.

Теорема Байеса

Theorem (Байеса)

Пусть $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$, *а* B *— произвольное событие. Тогда*

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)}. \tag{12}$$

Lemma (о полной вероятности)

Пусть $A_1 + \cdots + A_n = \Omega$ *и* B *— произвольное событие.*
Тогда

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n). \tag{13}$$

Доказательство леммы

Так как

$$B = A_1 B + \cdots + A_n B,$$

то согласно следствию (4) из аксиом:

$$P(B) = P(A_1 B) + \cdots + P(A_n B).$$

Для каждой пары имеет место равенство

$$P(A_i B) = P(A_i) P(B|A_i).$$

Доказательство теоремы Байеса

Согласно формуле (11)

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

верно

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$$

После подстановки $P(B)$ формулы полной вероятности получаем искомое.

События A_i называют *гипотезами*. Формула Байеса даёт вероятность гипотезы A_i после наступления события B. $P(A_i)$ означает априорную вероятность A_i.

Definition (Независимость событий)

События A и B называются *независимыми*, если

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{14}$$

Задача. Из множества чисел $1, 2, \ldots, n$ без возвращения выбирают 3 числа: первое — a_1, второе — a_2 и третье — a_3. Найдите вероятность события $A : a_1 < a_2 < a_3$ при условии $B : a_1 < a_3$. $P(A|B) =?$

Задача. Из множества чисел $1, 2, \ldots, n$ без возвращения выбирают 3 числа: первое — a_1, второе — a_2 и третье — a_3. Найдите вероятность события $A : a_1 < a_2 < a_3$ при условии $B : a_1 < a_3$. $P(A|B) =?$

Решение: 1 способ.

Вспомним, что $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

Построим вероятностное пространство: перестановки на 3-х элементах. Оно имеет 6 равновероятных элементарных событий:

$$\omega_1 = \{a_1 < a_2 < a_3\}, \omega_2 = \{a_1 < a_3 < a_2\}, \omega_3 = \{a_2 < a_1 < a_3\},$$

$$\omega_4 = \{a_2 < a_3 < a_1\}, \omega_5 = \{a_3 < a_1 < a_2\}, \omega_6 = \{a_3 < a_2 < a_1\}.$$

Событие AB включает в себя только одно элементарное событие: ω_1.

Событие B включает в себя три элементарных события: $B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

Отсюда $P(A|B) = \dfrac{1}{3}$.

Решение: 2 способ.
Условная вероятность образует новое вероятностное пространство, в качестве элементарных исходов берём исходы B, где
$B = \{a_1 < a_2 < a_3; a_1 < a_3 < a_2; a_2 < a_1 < a_3\}$. Отсюда снова $P(A|B) = \dfrac{1}{3}$.

Задача. Первый стрелок попадает в цель с вероятностью 50%, второй — с вероятностью 80%. Кидается честная монетка, и выбирается стрелок, который будет стрелять. Известно, что он попал. Найти вероятность того, что это был первый стрелок.

Задача. Первый стрелок попадает в цель с вероятностью 50%, второй — с вероятностью 80%. Кидается честная монетка, и выбирается стрелок, который будет стрелять. Известно, что он попал. Найти вероятность того, что это был первый стрелок.

Решение: обозначим событие H_1 — стрелял первый стрелок, H_2 — второй.
Пусть A означает попадание в цель.
Тогда по условию задачи $P(A|H_1) = 0.5$. Отсюда $P(\overline{A}|H_1) = 1 - 0.5 = 0.5$.
Аналогично: $P(A|H_2) = 0.8$, и $P(\overline{A}|H_2) = 1 - 0.8 = 0.2$.
$P(H_1) = P(H_2) = 0.5$.
Требуется найти $P(H_1|A)$ – вероятность того, что стрелял первый стрелок, при условии того, что было попадание. Воспользуемся формулой Байеса:

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2)} = \frac{0.5 \cdot 0.5}{0.8 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.5} = \frac{5}{13} \approx 0.38.$$

Случайная величина

Definition (случайная величина)

Определённая на пространстве Ω и принимающая числовые значения функция X от ω

$$\omega \in \Omega : \omega \to X(\omega) \tag{15}$$

называется случайной величиной на Ω.

Утверждение. Если φ есть функция двух переменных, а X и Y — случайные величины: то отображение

$$\omega \to \varphi(X(\omega), Y(\omega)) \tag{16}$$

тоже является случайной величиной, записываемой как $\varphi(X, Y)$.

Функция распределения случайной величины

Definition (Функция распределения)

Функция $x \to F_X(x)$, заданная на $\mathbb{R}^1$, где

$$F_X x = P(X \leqslant x) = \sum_{v_n \leqslant x} p_n$$

называется функцией распределения случайной величины X.
v_n — множество значений X.

Математическое ожидание

Definition

Пусть случайная величина X задана на пространстве Ω. Тогда её *математическое ожидание* $E(X)$ есть число, определяемое формулой

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}), \tag{17}$$

при условии абсолютной сходимости ряда. В этом случае математическое ожидание случайной величины X *существует*.

Задача. В отрезке [0..1] случайным образом выбирается точка. Назовём эту точку *хорошей*, если выбранный она попадает в интервал [0.25..0.75].
Найти математическое ожидание количества попыток случайных испытаний до того момента, как выпадет хорошая точка.

Задача. В отрезке [0..1] случайным образом выбирается точка. Назовём эту точку *хорошей*, если выбранный она попадает в интервал [0.25..0.75].
Найти математическое ожидание количества попыток случайных испытаний до того момента, как выпадет хорошая точка.
Попытка 1. С $p = 1/2$ точка — хорошая. С $p = 1/2$ — точка не является хорошей.
Каждая последующая попытка производится при неуспехе всех предыдущих.
Попытка 2. Вероятность её начала $p = 1/2$. Вероятность успеха $p = 1/4$.
Попытка 3. Вероятность её успеха $p = 1/8$.
Итого $E = 1 \cdot \dfrac{1}{2} + 2 \cdot \dfrac{1}{4} + \cdots + n \cdot \dfrac{1}{2^n} + \ldots$

Чему равно E?

Задача. [Схема Бернулли] Есть монетка, вероятность выпадения орла которой равна p. Пусть случайная величина X — количество выпадения орла за n бросков. Найти распределение этой случайной величины.

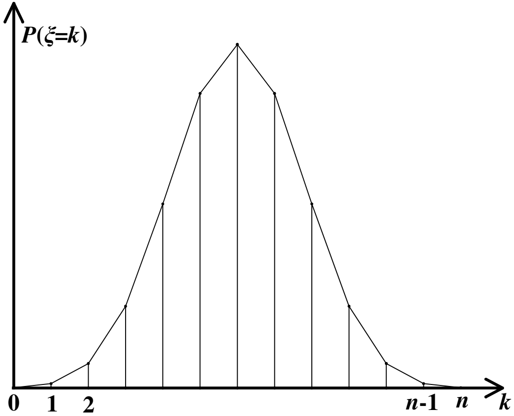
Задача. [Схема Бернулли] Есть монетка, вероятность выпадения орла которой равна p. Пусть случайная величина X — количество выпадения орла за n бросков. Найти распределение этой случайной величины.

Решение: Исходы — последовательности длины n, состоящие из 0 и 1.

Вероятностное пространство состоит из 2^n элементарных исходов.

$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k \cdot p^k(1-p)^{n-k}$.

Комбинаторная интерпретация $(A+\overline{A})(A+\overline{A})\ldots(A+\overline{A})$.

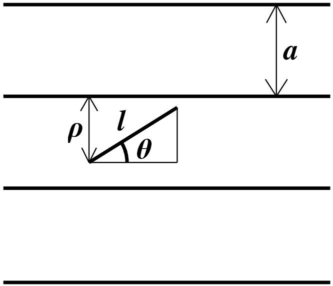


Игла Бюффона

Задача. [Игла Бюффона] На плоскости нарисованы горизонтальные линии, с расстояниями между ними, равными фиксированному числу a. На эту плоскость роняется иголка длиной $l < a$. Какова вероятность того, что она пересечёт какую-либо линию?

Игла Бюффона

Задача. [Игла Бюффона] На плоскости нарисованы горизонтальные линии, с расстояниями между ними, равными фиксированному числу a. На эту плоскость роняется иголка длиной $l < a$. Какова вероятность того, что она пересечёт какую-либо линию? **Решение:** Пусть ρ — расстояние от нижнего края иголки до ближайшей линии сверху, θ — угол наклона к прямым. Тогда $\rho \in [0; a]$, $\theta \in [0, \pi]$. Предполагаем, что все падения иглы равновозможны, то есть любая точка в прямоугольнике может быть получена с равной вероятностью.



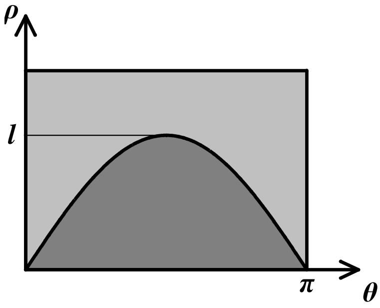
Игла Бюффона

Игла пересечёт линию при выполнении условия $l \cdot \sin\theta > \rho$.

Вероятность - отношения площадей под синусоидой и площади прямоугольника.

$$\int\limits_0^\pi l\sin\theta d\theta = 2l.$$

Отсюда искомая вероятность равна $p = \dfrac{2l}{\pi a}$.



Задача. [Сто заключённых]. В коридоре находятся 100 человек, у каждого свой номер (от 1 до 100). Их по одному заводят в комнату, в которой находится комод со 100 выдвижными ящиками. В ящики случайным образом разложены карточки с номерами (от 1 до 100). Каждому разрешается заглянуть в не более чем 50 ящиков. Цель каждого — определить, в каком ящике находится его номер. Общаться и передавать друг другу информацию запрещается. Предложите стратегию, которая с вероятностью не меньшей 0.3 (в предположении, что все $100!$ способов распределения карточек по ящикам равновероятны) приведёт к выигрышу всей команды. Команда выигрывает, если все 100 участников верно определили ящик с карточкой своего номера.

Решение:
Каждый человек сначала открывает ящик под своим номером, затем — под номером, который указан на карточке, лежащей в ящике, открытом перед этим и так далее.
Тогда команда выиграет в том случае, если в перестановке нет циклов длиннее 50.
Заметим, что может быть только один цикл длиннее 50.
Всего существует $C_n^r \cdot (n-r)! \cdot (r-1)! = \dfrac{n!}{r}$ перестановок с циклом длины r.
Вероятность того, что в перестановке есть цикл, длины больше 50 будет равна

$$p = \sum_{i=51}^{100} \frac{1}{i} \approx \ln 100 - \ln 50 = \ln 2 \approx 0.69.$$

Значит вероятность успеха будет $1 - 0.69 \approx 0.31$.