13 Графы

Задача 13.1. Каждое из рёбер полного графа с 6 вершинами покрашено в один из двух цветов. Докажите, что есть три вершины, все рёбра между которыми — одного цвета.

Задача 13.2. На праздновании Дня рождения Бильбо присутствовала вся его родня, как известно, не отличающаяся благонравным характером и радушием. Поэтому на празднике у каждого из присутствующих хватило терпения поздороваться ровно с n присутствующими (причём у каждого присутствующего это число n одинаково), а Бильбо, внимательно следивший за своими родственниками, подсчитал, что всего было сделано 109 рукопожатий. Чему может равняться n, и каково число присутствующих, если последних было больше двух?

Задача 13.3. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

Задача 13.4. В общежитии живут 214 студентов. Каждый час ровно 4 из них отправляются на кухню перекусить. Может ли так получиться, что в некоторый момент времени каждый из студентов столкнулся с каждым на кухне ровно по одному разу?

Задача 13.5. Придумайте два 2-регулярных графа на 8-ми вершинах, не изоморфных друг другу.

Задача 13.6. Доказать, что в любом графе с $n \geqslant 2$ вершинами существуют такие вершины k и l, что $\deg k = \deg l$.

Задача 13.7. Любые два города в стране соединены либо водным, либо воздушным транспортом. Докажите, что можно закрыть один из видов транспорта так, чтобы из любого города по-прежнему можно было добраться в любой другой.

Задача 13.8. В стране N городов. Между любыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнёт путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза.

Задача 13.9. В стране Бобряндии есть плотины, которые соединены реками. Известно, что из каждой плотины выходит не более k рек. Докажите, что бобры могут образовать $k+1$ коалицию таким образом, чтобы каждые две плотины, соединенные рекой, принадлежали различным коалициям.

Задача 13.10. Докажите, что в любом планарном графе есть вершина, степень которой не превосходит 5.

Задача 13.11. Какое максимальное число рёбер может быть в планарном графе на $n \geqslant 3$ вершинах?

Задача 13.12. В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

Задача 13.13. Дана волейбольная сетка размером 12 на 25 квадратиков. Какое наибольшее число верёвочек можно разрезать так, чтобы сетка не распалась?

Задача 13.14. В некоторый момент однокругового турнира из 100 человек оказалось, что все игроки, кроме Лошикова, выиграли по 26 игр, а проиграли по 25. Докажите, что Лошиков совсем не умеет играть.

Задача 13.15. В элитной соцсети «Дебильник» каждый участник, звезда, может подписаться на другого. Суперзвездой группы считается тот, на которого подписаны все члены группы и который не подписан ни на одного из членов группы. Сеть — элитная, информация о подписках закрыта от посторонних, особенно журналистов.

Однако журнал «Светильник» решил провести журналистское расследование для того, чтобы определить, имеется ли в данной группе из N звёзд суперзвезда, и если имеется, то кто. Для этого он может задавать вопросы «Подписан ли А на В». Увы, за каждый вопрос нужно заплатить 1 биткойн. Журнал готов пойти на это, но хочется заплатить поменьше. На какую сумму рассчитывать журналу?

Задача 13.16. Имеется полный граф на 64 вершинах, в котором 2016 белых рёбер, остальные рёбра чёрные. Коля и Женя играют в следующую игру: Коля показывает на ребро, а Женя или удаляет его, или выкрашивает в чёрный цвет. Перед последним, 2016 ходом, Коля хочет предсказать, получится ли граф после его хода связным. Докажите, что Женя может опровергнуть любое предсказание Коли.

Задача 13.17. В группе 20 студентов. Каждый дружит не менее, чем с 10 другими. Доказать, что можно выбрать две тройки таким образом, чтобы любой студент из одной тройки дружил с любым студентом из другой тройки.

Задача 13.18. 38 попугаев передрались, измеряя рост удава. Каждый из них сумел выдрать одно перо из чьего-то хвоста и у каждого попугая было выдрано одно перо. Кроме того, для любых трёх попугаев можно указать четвёртого, выдравшего перо у одного из них. Докажите, что для наведения порядка удав может проглотить не более 6 попугаев, а остальных рассадить в две клетки поровну так, чтобы ни один попугай не попал в клетку со своим обидчиком.

Задача 13.19. Из клетчатой доски размером 70×70 вырезали 2018 клеток. Докажите, что доска распалась не более чем на 2018 кусков. Два куска, не имеющие общих точек кроме вершин клеток, считаются не соединёнными друг с другом.