Математические основы информатики

Графы.

Сергей Леонидович Бабичев

Основные термины

Definition (Ориентированный граф)

Ориентированный граф $G = (V, E)$ есть пара из конечного множества V и множества $E \in V \times V$.

Definition (Вершины графа)

Вершины графа: элементы множества V (*vertex*, *vertices*).

Definition (Рёбра графа)

Рёбра графа: элементы множества E. (*edges*).

Definition (Неориентированный граф)

Неориентированный граф: граф, рёбра которого суть неупорядоченные пары.

Definition (Петля)

Петля: ребро из вершины v_1 в вершину v_2, где $v_1 = v_2$.

Definition (Смежные вершины)

Смежные вершины: v_i и v_j смежны, если имеется ребро (v_i, v_j).

Definition (Множество смежных вершин)

Множество смежных вершин вершины v обозначается Adj_v.

Definition (Степень вершины)

Степень или *валентность* вершины v есть размер множества $Adj_v = |Adj_v|$.
Обозначается $\deg v$.

Definition (Путь)

Путь $p_{0,n}$ из v_0 в v_n есть последовательность рёбер, таких, что $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2) \ldots e_n = (v_{n-1}, v_n)$.

Definition (Простой путь)

Простой путь $p_{0,n}$ есть путь, в котором все вершины попарно различны.

Definition (Длина пути)

Длина пути $p_{0,n}$ есть количество k рёбер в пути.

Definition (Цикл)

Цикл: путь, в котором $v_0 = v_n$.

Definition (Неориентированный связный граф)

Неориентированный связный граф: для любой пары вершин v_k и v_l существует путь $p_{k,l}$.

Definition (Связная компонента вершины)

Связная компонента вершины v_i: множество вершин $\{v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots\}$, для которых существует пути $p_{i,j_1}, p_{i,j_2} \ldots$.

Definition (Расстояние между вершинами)

Расстояние $\delta(v_i, v_j)$ *между вершинами* v_i *и* v_j есть длина кратчайшего пути из v_i в v_j.

$$\delta(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$$

$$\delta(u, v) \leqslant \delta(u, v') + \delta(v', v)$$

Definition (Дерево)

Дерево есть связный граф без циклов.

Definition (Взвешенный граф)

Взвешенный граф: каждое ребро $e_{u,v}$ характеризуется функцией $c(u, v, \ldots)$.

Definition (Полный граф)

Граф G называется *полным*, если для любой пары вершин v_i и v_j существует ребро $e_{i,j}$. Другое название — *клика*. Обозначается K_n.

Теория и практика.

Lemma (О рукопожатиях)

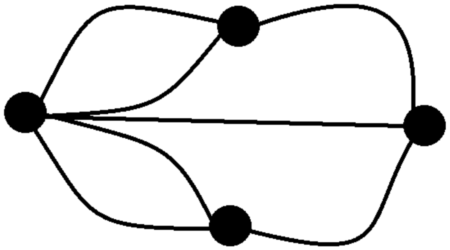
Число нечётных вершин любого графа чётно.

Доказательство.

Сумма степеней всех вершин — чётна, при суммировании каждое ребро учитывается дважды. Эта сумма не может быть получена при суммировании нечётного числа нечётных чисел. □

Эйлеровы пути и Эйлеровы циклы

Задача о семи кёнигсбергских мостах. В городе Кёнигсберге было 7 мостов.



Найти способ, как можно пройти по всем семи мостам Кёнигсберга, не проходя ни по одному из них дважды.
Обозначим части города, ограниченные водой, вершинами графа, а мосты, соединяющие части города — рёбрами.

Эйлеровы пути и Эйлеровы циклы

Definition (Эйлеров путь)

Эйлеровым путём в графе G называется такой простой путь $p_{k,l}$, который содержит все рёбра графа.

Definition (Эйлеров цикл)

Эйлеровым циклом в графе G называется такой простой цикл $p_{k,l}$, который содержит все рёбра графа.

Lemma (Об Эйлеровых путях)

В связном графе G содержится эйлеров путь тогда и только тогда, когда количество вершин с нечётной степенью не больше двух.

Example

У живущего в Шире Бильбо Беггинса есть 8 соседей. Причём между девятью соседскими домами проложены дороги, каждая из которых соединяет два дома. Известно, что каждый дом соединён по крайней мере с четырьмя другими. Грядёт праздник Урожая, к которому Бильбо наготовил свиных пирогов по рецепту гондорцев, чтобы угостить своих соседей, до которых можно дойти по дороге (пирог большой, нести непросто; к тому же, обладающий строптивым характером Бильбо не собирается пачкать в пыли свой праздничный кафтан). Докажите, что Бильбо придётся угостить пирогами и поздравить с Днём Урожая всех своих соседей.

Example

У живущего в Шире Бильбо Беггинса есть 8 соседей. Причём между девятью соседскими домами проложены дороги, каждая из которых соединяет два дома. Известно, что каждый дом соединён по крайней мере с четырьмя другими. Грядёт праздник Урожая, к которому Бильбо наготовил свиных пирогов по рецепту гондорцев, чтобы угостить своих соседей, до которых можно дойти по дороге (пирог большой, нести непросто; к тому же, обладающий строптивым характером Бильбо не собирается пачкать в пыли свой праздничный кафтан). Докажите, что Бильбо придётся угостить пирогами и поздравить с Днём Урожая всех своих соседей.

Доказательство.

Предположим, что утверждение неверно, и есть какой-то дом A, до которого Бильбо, живущий в доме B, не сможет дойти. Но в таком случае среди оставшихся 7 есть по крайней мере 4 дома, соединённых с домом Бильбо дорогами, а также есть 4 дома, соединённых дорогами с домом A. Но в таком случае один из этих домов соединён дорогой как с A, так и с B, что противоречит предположению. Поэтому Бильбо может по дорогам дойти до любого дома и поздравить любого из хозяев с Днём Урожая. $\square$

Example

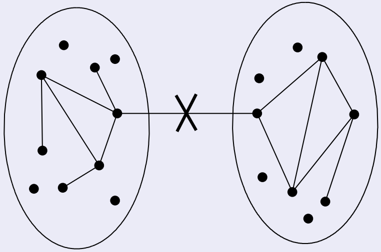
В некоторой стране каждый город соединён ровно с 10 другими, при этом из любого города можно добраться в любой другой. Одну дорогу закрыли на ремонт. Доказать, что из любого города всё ещё можно добраться до любого другого.

Example

В некоторой стране каждый город соединён ровно с 10 другими, при этом из любого города можно добраться в любой другой. Одну дорогу закрыли на ремонт. Доказать, что из любого города всё ещё можно добраться до любого другого.

Доказательство.

Имеется связный граф, степень каждой вершины которого равна 10. Предположим, что после убирания дороги (ребра) граф перестал быть связным. Это значит, что граф разбился на две не связанные между собой части.



Посчитаем сумму степеней в левой части. Пусть в ней осталось k городов. Из каждого города, кроме одного, по-прежнему выходит 10 дорог, значит, сумма степеней вершин в этом графе равна $10k-1$. Но это нечётное число, а значит, мы получили противоречие. Таким образом, после убирания ребра граф остался связным, что и требовалось доказать. □

Ориентированные графы

Definition (Степени исхода и захода)

Степень исхода вершины v_i есть количество рёбер вида (v_i, v_k). *Степень захода* вершины v_i есть количество рёбер вида (v_k, v_i).

Lemma (Ориентированная лемма о рукопожатиях)

В любом ориентированном графе сумма степеней захода всех вершин равна сумме степеней исхода всех вершин.

Definition (Сильно связные вершины)

Вершины u и v являются *сильно связными*, если существуют пути $p_{u,v}$ и $p_{v,u}$.

Definition (Сильно связный граф)

Граф G — сильносвязный, если любые его две вершины сильносвязны.

Example

В некоторой стране города соединены односторонними авиалиниями. Известно, что выполняется условие: вылетев из любого города, нельзя в него вернуться, пользуясь этими авиалиниями. Докажите, что можно дополнить систему авиалиний так, чтобы любые два города были бы соединены авиалинией и при этом всё так же, вылетев из города, в него нельзя было вернуться.

Example

В некоторой стране города соединены односторонними авиалиниями. Известно, что выполняется условие: вылетев из любого города, нельзя в него вернуться, пользуясь этими авиалиниями. Докажите, что можно дополнить систему авиалиний так, чтобы любые два города были бы соединены авиалинией и при этом всё так же, вылетев из города, в него нельзя было вернуться.

Доказательство.

Дан ориентированный граф без циклов. Рассмотрим два произвольных города A и B, между которыми нет ребра, и докажем, что их можно соединить либо направленным ребром AB, либо направленным ребром BA. Предположим обратное. Если нельзя провести направленное ребро AB, значит, при его проведении появляется цикл: существует путь S_1 от B до A. Аналогично, если нельзя провести направленное ребро BA, то существует путь S_2 от A до B. Но тогда, вылетев из вершины A и двигаясь сначала по пути S_2, а потом по пути S_1, мы снова вернёмся в вершину A — противоречие. Поэтому можно провести какое-то направленное ребро между вершинами A и B. Продолжим подобную процедуру, пока между любыми двумя вершинами не будет проведено какое-то направленное ребро, чего и требовалось достигнуть. $\square$

Двудольные графы

Definition (Двудольные графы)

Граф называется *двудольным*, если все вершины в нём можно разбить на два множества (доли) так, чтобы все рёбра находились между вершинами различных множеств.

Theorem (О чётных циклах)

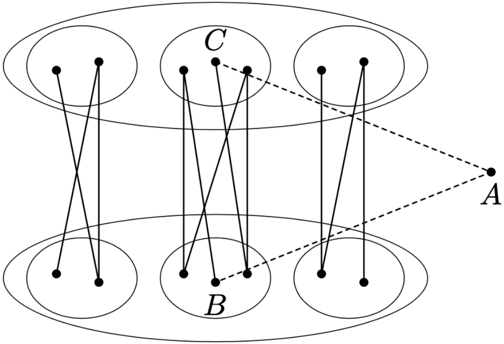
Граф является двудольным тогда и только тогда, когда в нём не содержатся циклы нечётной длины.

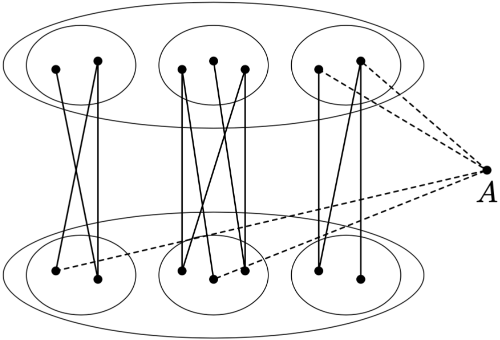
Доказательство теоремы о чётных циклах

Доказательство.

- Из двудольности графа чётность циклов следует элементарно.
- Граф без нечётных циклов есть двудольный доказывается по индукции.
  - База — 1 или 2 вершины.
  - Переход: пусть выполняется Y_n «граф с n вершинами без нечётных циклов — двудольный». Перейдём к Y_{n+1}. Выберем n вершин — Y_n верно. Пусть граф разбился на несколько компонент. Докажем, что оставшуюся вершину A всегда можно поместить в одну из компонент. Она не может быть соединена с вершинами из одной компоненты связности, но разных долей $\to$ она может быть соединена только с одной из долей каждой компоненты связности.
  - Меняем местами вершины в долях так, чтобы A оказалась соединена только с вершинами одной доли.

$\square$





Если A соединена с B и C, то есть нечётный цикл

Можно поменять местами вершины в 3 доле.

Планарные графы

Definition (Планарные графы)

Простой (не имеющий петель и кратных ребер) граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости без пересечения рёбер. [a].

[a] Верно даже более сильное утверждение: планарный граф можно изобразить на плоскости так, что его ребра — непересекающиеся *отрезки*; соответствующее утверждение — *теорема Фари*.

Definition (Грани планарного графа)

Гранями планарного графа называются циклы, которые не могут быть разбиты на более мелкие циклы.

Definition (n-регулярность)

Граф называется *n-регулярным*, если каждая его вершина имеет степень n.

Изоморфизм графов

Definition (Изоморфизм графов)

Граф G изоморфен графу H, если существует биективное отображение f вершин графа G на вершины графа H, сохраняющие отношение смежности.

Отношение изоморфизма графов — отношение эквивалентности.

Definition (Гомеоморфизм графов)

Введём отношения R так: два графа находятся в отношении R, если один можно свести к другому в отношении изоморфизма, заменой вершины степени 2 на ребро между смежными ей вершинами или добавление вершины степени 2 на ребро. Тогда отношением *гомеоморфизма* является транзитивное замыкание отношения R.

Формула Эйлера

Theorem (Формула Эйлера)

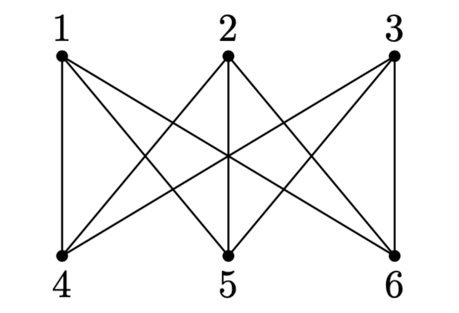
Для любого связного планарного графа имеет место равенство $|V| - |E| + |F| = 1$*, где* $|V|$ *— число вершин,* $|E|$ *— число рёбер, а* $|F|$ *— число граней этого графа.*

Example

Есть три дома и три магазина — продуктовый, аптека и хозяйственный. Можно ли от каждого дома проложить тропинку до каждого из магазинов так, чтобы тропинки не пересекались?

Solution

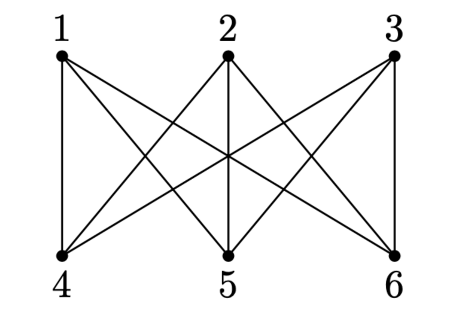
Пусть дома и магазины — это вершины графа, а тропинки — это рёбра. Пусть вершины под номерами 1, 2 *и* 3 *— это дома, а* 4, 5 *и* 6 *— магазины . Количество вершин —* 6, *количество рёбер —* 9. *Для того чтобы граф был планарным, необходимо, чтобы у него было количество граней, равное* $|F| = |E| + 1 - |V| = 9 + 1 - 6 = 4$. *Но можно насчитать по крайней мере* 5 *простых циклов:* $1-4-2-5-1$; $1-4-3-6-1$; $2-5-3-6-2$; $1-6-2-4-1$; $2-6-3-4-2$.



Значит, граф не является планарным, и значит, его нельзя изобразить на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались.

Solution

Пусть дома и магазины — это вершины графа, а тропинки — это рёбра. Пусть вершины под номерами 1, 2 *и* 3 *— это дома, а* 4, 5 *и* 6 *— магазины . Количество вершин —* 6, *количество рёбер —* 9. *Для того чтобы граф был планарным, необходимо, чтобы у него было количество граней, равное* $|F| = |E| + 1 - |V| = 9 + 1 - 6 = 4$. *Но можно насчитать по крайней мере* 5 *простых циклов:* $1-4-2-5-1$; $1-4-3-6-1$; $2-5-3-6-2$; $1-6-2-4-1$; $2-6-3-4-2$.



Значит, граф не является планарным, и значит, его нельзя изобразить на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались.

Заметили ли вы, что мы доказали непланарность графа $K_{3,3}$*?*

Example

Можно ли между каждыми двумя из 5 городов провести дорогу так, чтобы эти дороги не пересекались?

Решение: Нужно проверить планарность графа K_5. Количество вершин $|V| = 5$, рёбер $|E| = C_5^2 = 10$. Грани — простые циклы. В графе не менее 10 простых циклов, образуемых тройками вершин. По формуле Эйлера $|F| = |E| + 1 - |V| = 10 + 1 - 5 = 6 < 10$. Граф не планарный.

Lemma

Для любого связного планарного графа имеет место неравенство

$$2|E| \geqslant 3|F| \text{ \textit{при} } |V| \geqslant 3.$$

Доказательство.

Каждое ребро принадлежит максимум двум граням (ровно двум граням, если это ребро принадлежит циклу, и одной грани — в противном случае), поэтому если обозначить через $\rho(f), f \in F$ число рёбер, ограничивающих грань f, то $2|E| \geqslant \sum\limits_{f \in F} \rho(f)$. С другой стороны, $\rho(f) \geqslant 3$, следовательно:

$$\sum_{f \in F} \rho(f) \geqslant 3|F|.$$

Применяя два полученных неравенства, получаем искомое неравенство. □

Теорема Куратовского-Понтрягина

Theorem (Куратовского-Понтрягина)

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 *и* $K_{3,3}$.

Деревья

Свойства деревьев.

- В дереве имеется минимум две вершины со степенью 1.
- Число рёбер дерева на единицу меньше числа вершин.
- Из связного графа, не являющегося деревом, можно удалить несколько рёбер так, чтобы осталось дерево.
- В связном графе на n вершинах число рёбер не меньше $n - 1$.
- Связный граф, число рёбер которого на единицу меньше числа вершин, является деревом.

Остовные деревья

Definition (Остов связного графа)

Граф O называется *остовом* связного графа G, если O имеет те же вершины, что и G, получается из G удалением некоторых рёбер и является деревом.

Утверждение: У всякого связного графа есть хотя бы одно остовное дерево.

Lemma

В любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящим рёбрами так, чтобы он остался связным.

Доказательство.

В любом связном графе есть остов. Удалим его висячую вершину. $\square$

Example (Задача на остовы)

В стране 45 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трём авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полёты, можно будет добраться из любого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее число авиалиний может быть в стране?

Решение.

Допустим, что у первой авиакомпании a авиалиний, у второй — b, у третьей — c. Тогда условие эквивалентно трём неравенствам

$$a + b \geqslant 44,\ b + c \geqslant 44,\ a + c \geqslant 44.$$

$a + b + c \geqslant 66 \rightarrow$ минимум равен 66 авиакомпаний. $\square$

Example

Из клетчатой доски размером 70×70 вырезали 2018 клеток. Докажите, что доска распалась не более чем на 2018 кусков. Два куска, не имеющие общих точек кроме вершин клеток, считаются не соединёнными друг с другом.