Введение в алгоритмы.

Лекция 11
Хеширование.

Сергей Леонидович Бабичев

План лекции

1. Обобщённый быстрый поиск.
2. Хеш-функции.
3. Хеш-таблицы

Абстракция *отображение* как *хранилище*

Структура данных операция	Худшее время	Среднее время
Balanced BST: **C**reate	$O(\log N)$	$O(\log N)$
Balanced BST: **R**ead	$O(\log N)$	$O(\log N)$
Balanced BST: **U**pdate	$O(\log N)$	$O(\log N)$
Balanced BST: **D**elete	$O(\log N)$	$O(\log N)$

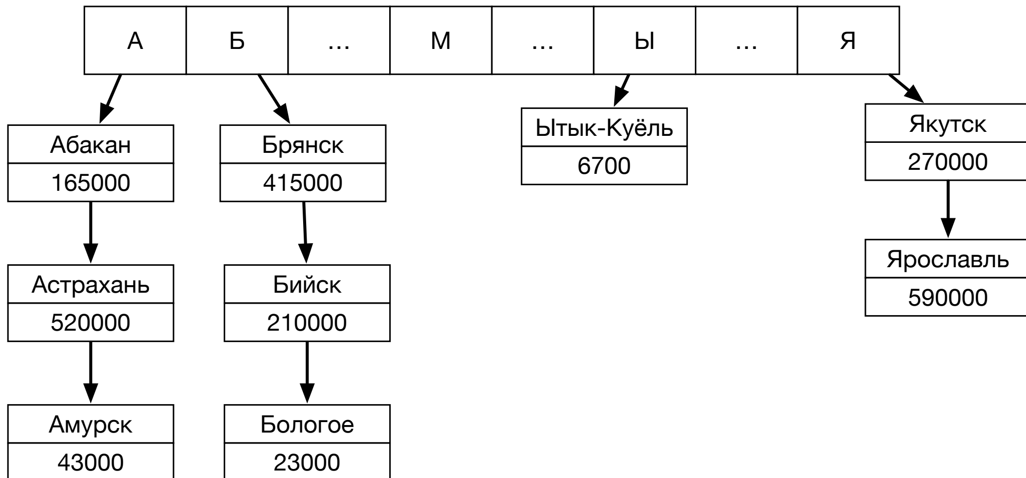
Обобщённый быстрый поиск

Обобщённый быстрый поиск

- Требуется:
  - Уменьшить амортизационную стоимость поиска.
  - Уменьшить сложность функции, например, $O(\log N) \to O(\log\log N)$.

Обобщённый быстрый поиск

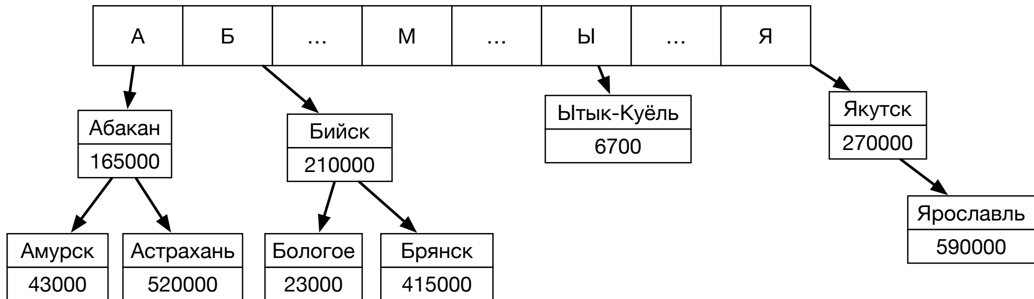
- База данных названий городов и их численности.



33 связных списка.

Обобщённый быстрый поиск

- База данных названий городов и численности их населения.



33 сбалансированных дерева.

Обобщённый быстрый поиск

- Основная идея — разбиение пространства ключей на независимые подпространства ($partitioning$).
- При независимом разбиении на M подпространств сложность уменьшается.

При разбиении множества N ключей на примерно равные M подмножеств каждое подмножество имеет меньший размер (N/M) и, соответственно, меньшую сложность вычислений.

Обобщённый быстрый поиск

- При увеличении M

$$\lim_{K \to \infty} T(N, M) = O(1)$$

$$\lim_{K \to \infty} Mem(N, M) = \infty$$

- Имеется зона оптимальности при $M \approx N$

Обобщённый быстрый поиск

- Требуется иметь детерминированный способ разбиения пространства ключей на M независимых подпространств.
- Условия разбиения:

$$|K_1| \approx |K_2| \approx \cdots \approx |K_M|$$

$$\sum_{i=1}^{M} |K_i| = |K|$$

- Эврика! Создаём функцию $H(K)$, удовлетворяющую некоторым условиям.

Хеш-функции

Хеш-функции

- Функция преобразования:

$$H(K) \to V$$

$$|D(V)| = M$$

- Отображение пространства ключей K на пространство значений V.
- M — мощность множества пространства значений.

Хеш-функции

- Введём понятие *соперника*, то есть того, кто предоставляет нам ключи.
- Цель *соперника* — предоставлять ключи таким образом, чтобы значения функции оказались не равновероятными.
- *Соперник* знает хеш-функцию и может выбирать ключи.

Хеш-функции

Хотелось бы обеспечить свойства:

- **Эффективность.**

$$T(H(K)) \leqslant O(L(K)),$$

  где $L(K)$ — мера длины ключа K.

- **Равномерность.** Каждое выходное значение равновероятно.

$$p_{H(K_1)} = p_{H(K_2)} = \cdots = p_{H(K_M)}$$

- **Лавинность.** При изменении одного бита во входной последовательности изменяется значительное число выходных битов.
- Для борьбы с *соперником* — **необратимость**, то есть невозможность восстановления ключа по значению его функции.

Хеш-функции

Следствия их требуемых свойств.

- Функция не должна быть непрерывной. Для близких значений аргумента должны получаться сильно различающиеся результаты.
- В значениях функции не должно образовываться *кластеров*, множеств близко стоящих точек.

Определение непрерывности для дискретных функций может быть дано неформально.

Хеш-функции

Примеры плохих функций:

- $H = K^2$
  Функция монотонно возрастает. Пространство значений ключа слишком велико и часть значений недостижима.
- $H = \sum_{i=0}^{s.size()-1} s[i]$ для строки s.
  Функция даёт одинаковые значения для строк abcd и abdc и отличающиеся на единицу для строк abcd и abde. Сопернику легко найти ключи, которые дают равные значения функции.

Универсальная хеш-функция

- Совпадение значений функции для разных значений ключа называется **коллизией**.
- Введём H^* — множество хеш-функций, которые отображают пространство ключей в $m = |D(M)|$ различных значений.
- Это множество **универсально**, если для каждой пары ключей $K_i, K_j, i \neq j$ количество хеш-функций, для которых $H^*(K_i) = H^*(K_j)$ не более $\frac{|H^*|}{m}$.

Универсальная хеш-функция

- Если случайным образом выбирается функция из множества H^*, то для случайной пары ключей $K_i, K_j, i \neq j$ вероятность коллизии не должна превышать $\frac{1}{m}$

Теорема об универсальном множестве хеш-функций

Теорема.

- Пусть множество $Z_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, множество $Z_p^* = \{1, 2, \ldots, p-1\}$, p — простое число, $a \in Z_p^*$, $b \in Z_p$.
- Тогда множество

$$H^*(p, m) = \{H(a, b, K) = ((aK + b) \mod p) \mod m\}$$

есть универсальное множество хеш-функций.

Хеш-функции

- Не универсальная, не не столь уж и отвратительная функция

$$h = \sum_{i=0}^{n} s_i \times 8^i \mod HASHSIZE$$

Обратная схема Горнера:

```
unsigned hash_sum(const char *s, unsigned HASHSIZE)
{
    unsigned sum = 0;
    while (*s != 0) {
        sum <<= 3;
        sum += *s++;
    }
    return sum % HASHSIZE;
}
```

Хеш-функции

- Хеш-функция получше

```
unsigned hash_sedgwick(const char *s, unsigned HASHSIZE) {
    unsigned h, i, a = 31415, b = 27183;
    for (h = 0, i = 0; s[i] != 0;
      i++, a = a * b % (HASHSIZE-1)) {
        h = (a * h + s[i]) % HASHSIZE;
    }
    return h;
}
```

Хеш-функции

- Лучшие по статистическим показателям функции — криптографические.
- Недостатки:
  - длинный код
  - медленные

Весьма хорошая хеш-функция

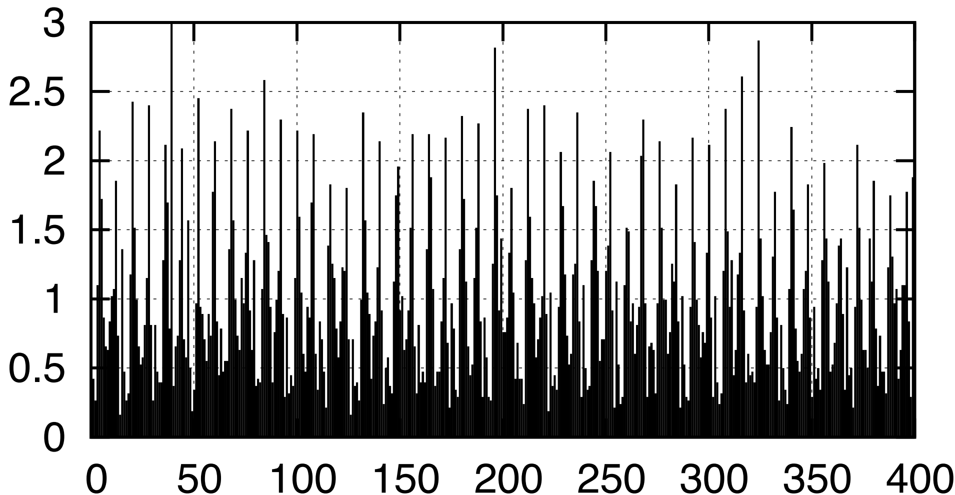
Пользуется свойствами полей Галуа $GF(2^{32})$:

```
uint32 hash(const char *ss) {
    uint32 ret = 0xFFFFFFFF;
    while (*s != 0) {
        ret ^= *s++ & 0xFF;
        ret = (ret >> 8) ^ table[ret & 0xFF];
    }
    return ret ^ 0xFFFFFFFF;
}
```

`table` вычисляется заранее по какому-нибудь неприводимому полиному в поле $GF(2^{32})$.

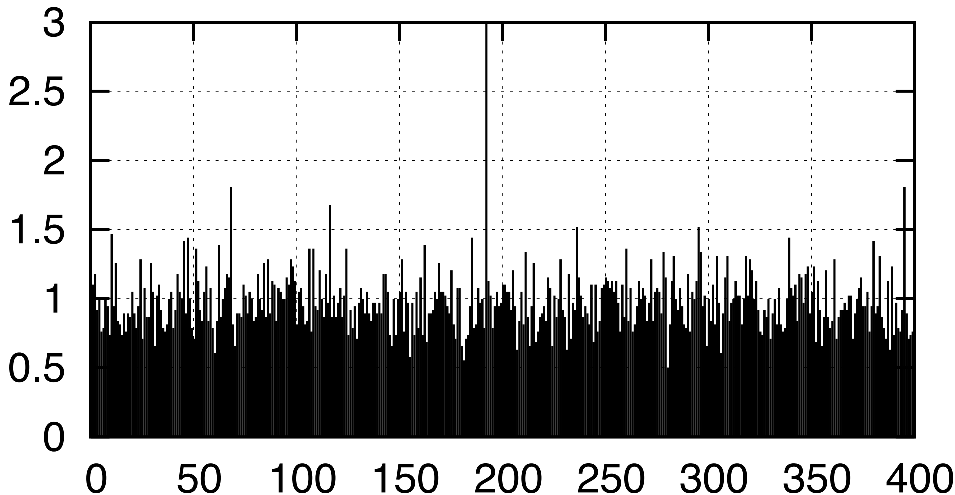
Хеш-функции: исследование свойств

Распределение значений для случайных идентификаторов. Плохая функция.



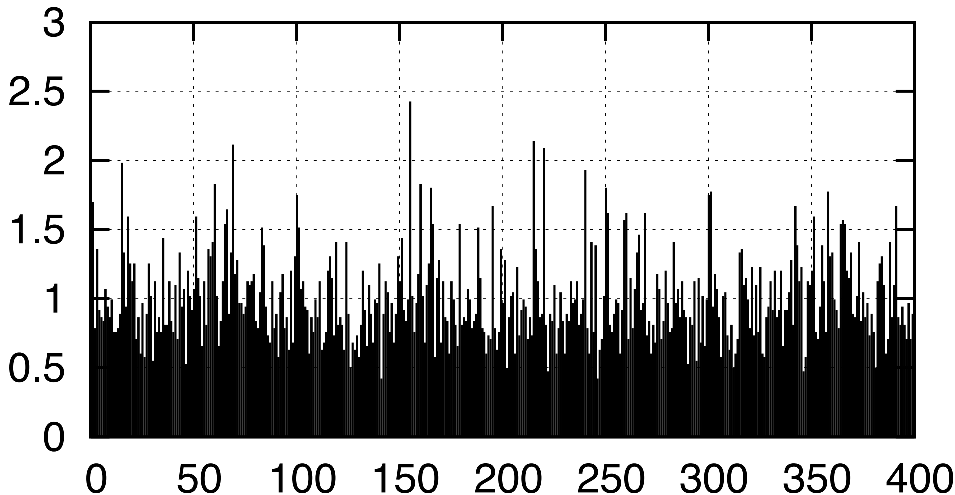
Хеш-функции

Распределение значений для случайных идентификаторов. Плохая функция.



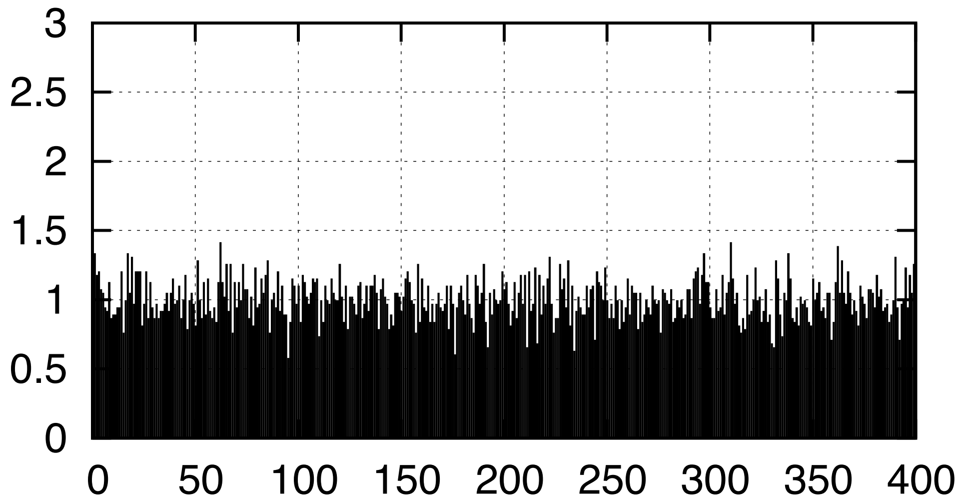
Хеш-функции

Хорошая функция.



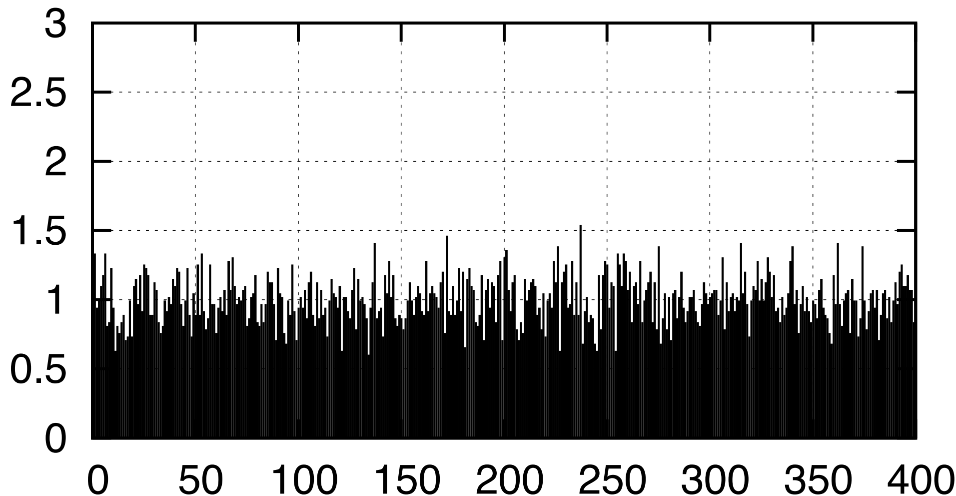
Хеш-функции

Хорошая функция.



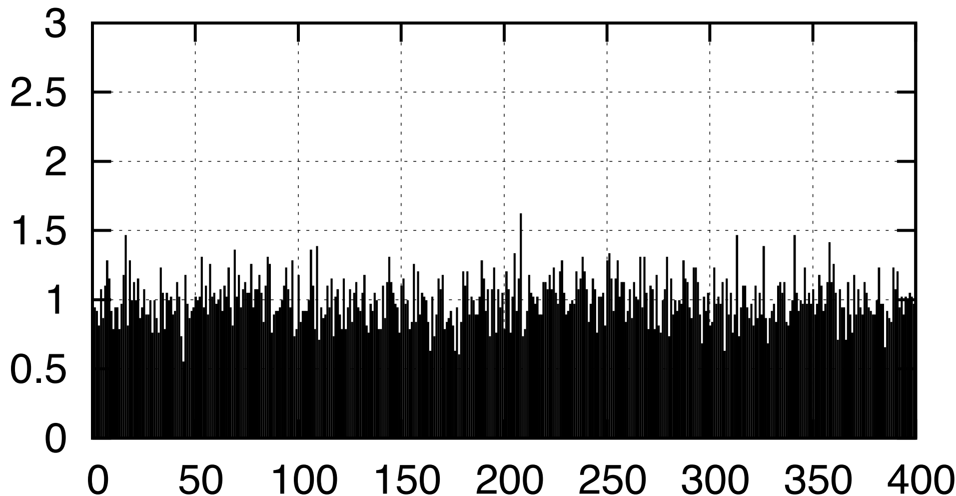
Хеш-функции

Отличная функция.



Хеш-функции

Отличная функция.

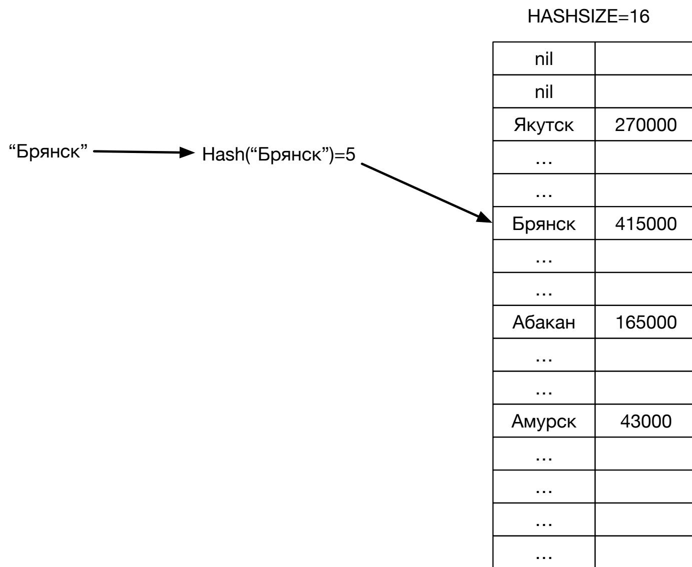


Затраты времени на исполнение хеш-функций

Алгоритм/набор	include.txt	source.txt
hash_sum	890	786
hash_sedgewick	2873	2312
hash_crc	912	801

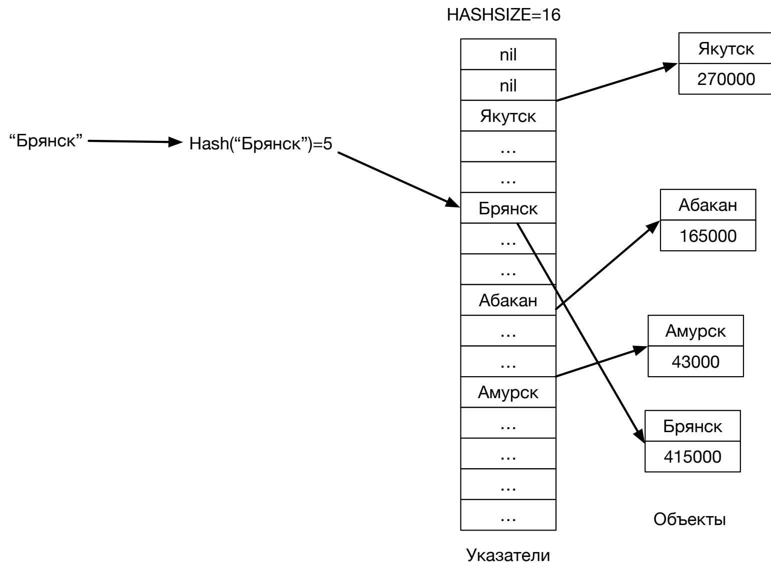
Хеш-таблицы

- Простая хеш-таблица



Хеш-таблицы

- Простая хеш-таблица, обычная реализация в виде массива указателей

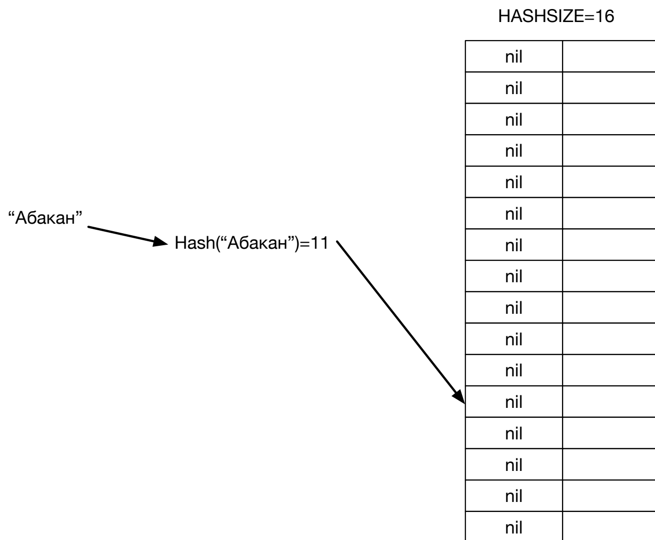


Хеш-таблицы

- Известно количество элементов в контейнере C
- Известен размер массива M
- $\alpha = \frac{C}{M}$ — коэффициент заполнения, *fill-factor*, *load-factor*.
- α — главный показатель хеш-таблицы.

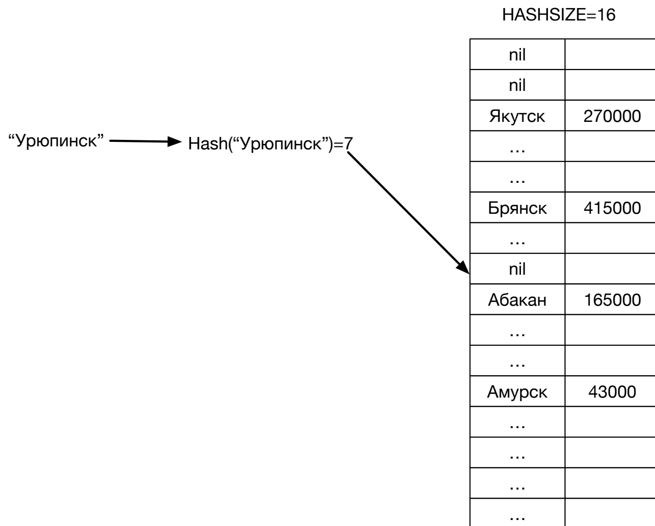
Хеш-таблицы

- Операция создания хеш-таблицы



Хеш-таблицы

- Операция создания хеш-таблицы требует операцию поиска.

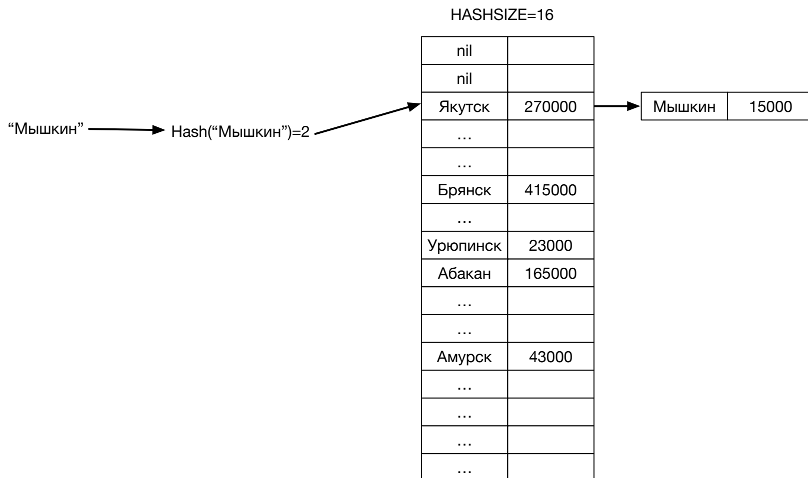


Хеш-таблицы

- Hash("Якутск") = 2
- Hash("Мышкин") = 2
- Это — *коллизия*
- Коллизии — нежелательны.
- Без коллизий сложность операций поиска и вставки равна $O(1)$
- Способы борьбы с коллизиями:
  - Прямая или закрытая адресация
  - Открытая адресация
  - Рехеширование

Хеш-таблицы с прямой адресацией

- При коллизии во время создания элемента создаётся связный список конфликтующих.
- Можно использовать любую поисковую структуру данных.



Хеш-таблицы с прямой адресацией

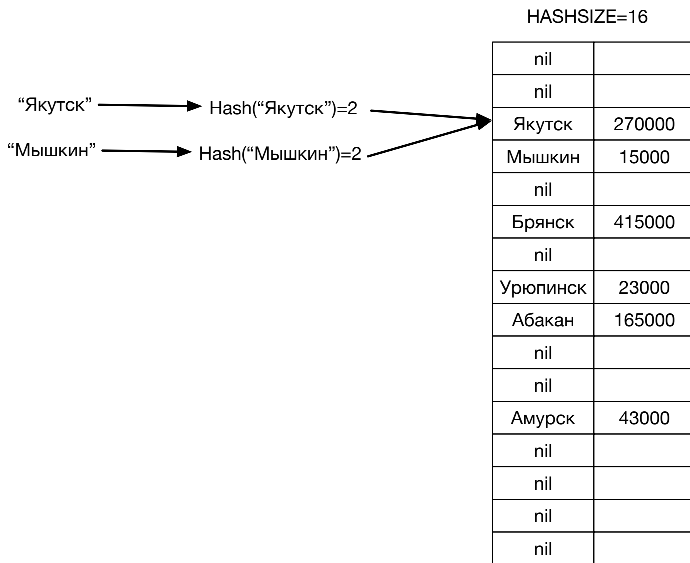
1. При поиске вычисляется хеш-функция.
2. Определяется место поиска — вторичная поисковая структуре данных.
3. Если вторичной структуры нет, то нет и элемента.
4. Иначе элемент ищется во вторичной структуре.

Хеш-таблицы с прямой адресацией

1. При удалении вычисляется хеш-функция.
2. Определяется место поиска — вторичная поисковая структуре данных.
3. Если вторичной структуры нет, то нет и элемента.
4. Иначе элемент удаляется из вторичной структуре.
5. Если вторичная структура пуста, удаляет точку входа.

Хеш-таблицы с открытой адресацией

- Другой способ поиска — искать в той же таблице повторно.



Хеш-таблицы с открытой адресацией

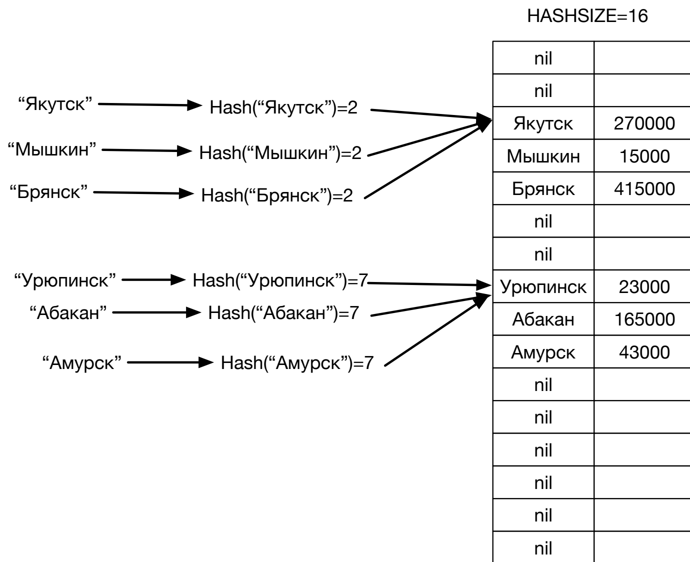
1. При поиске существующего вычисляется хеш-функция.
2. Определяется место поиска — индекс в хеш-таблице.
3. Если по индексу ничего нет, то нет и элемента.
4. Иначе по индексу — элемент с нашим ключом — элемент найден.
5. Если по индексу — элемент с другим ключом или элемент помечен удалённым, индекс увеличиваем на единицу и переходим к пункту 3.
6. Следующий индекс вычисляется по формуле $(index + 1) \mod M$.

Хеш-таблицы с открытой адресацией

1. При вставке вычисляется хеш-функция.
2. Определяется место поиска — индекс в хеш-таблице.
3. Если по индексу ничего нет или элемент помечен удалённым, то вставляем по индексу и выходим.
4. Если по индексу элемент с нашим ключом — меняем данные и выходим.
5. Если по индексу элемент с другим ключом то индекс увеличиваем на единицу и переходим к пункту 3.
6. Следующий индекс вычисляется по формуле $(index + 1) \mod M$.

Хеш-таблицы с открытой адресацией

1. Почему мы требуем свойства равномерности от хеш-функции.



Хеш-таблицы с открытой адресацией

1. При удалении вычисляется хеш-функция.
2. Определяется место поиска — индекс в хеш-таблице.
3. Если по индексу ничего нет, то нет и элемента.
4. Иначе по индексу — элемент с нашим ключом — элемент найден.
5. Если по индексу — элемент с другим ключом, индекс увеличивается на единицу и переходим к пункту 3.
6. Следующий индекс вычисляется по формуле $(index + 1) \mod M$.

Расширение хеш-таблиц

Когда *fill-factor* начинает превосходить 0.5-0.6 таблицу расширяют.

- Создаётся другой массив указателей с нужным размером
- Из оригинального массива в порядке увеличения индексов извлекаются элементы и вставляются в новый массив (таблицу).
- Старый массив удаляется.

Варианты хеш-таблиц: рехеширование

- В ряде случаев можно уменьшить кластеризацию ключей, используя *рехеширование*.
- При конфликте хеша вычисляется вторая хеш-функция $S = H_2(key)$ от ключа или его части, которая тоже должна давать число в диапазоне $[0 \ldots M)$.
- Все методы — вставки, поиска, удаления — немного изменяются.
- Следующие попытки поиска ключа производится по адресам $(index + k \cdot S) \mod M$.
- Для эффективной работы рехеширования требуется, чтобы $\gcd(S, M) = 1$.
- Проще всего добиться этого выбором M как простого числа.

Несколько примеров

Тестовый пример: хеш-таблица, в которую вставляются 100000 случайных строк, содержащих от 10 до 30 букв от `A` до `Z`, которые после всех вставок удалялись. Фиксировалось количество сравнений строк (коллизий)

```
size_t h1(const char *s) {
    size_t ret = 0;
    while (*s != 0) {
        ret += *s++ & 0xFF;
    }
    return ret;
}
```

```
size_t h2(const char *s) {
    size_t ret = 0;
    while (*s != 0) {
        ret += ret + *s++ & 0xFF;
    }
    return ret;
}
```

```
size_t h3(const char *s) {
    size_t ret = 0;
    while (*s != 0) {
        ret *= 257;
        ret += *s++ & 0xFF;
    }
    return ret;
}
```

```
size_t h4(const char *s) {
    size_t ret = 0;
    while (*s != 0) {
        ret *= 259;
        ret += *s++ & 0xFF;
    }
    return ret;
}
```

Результаты испытаний

Количество сравнений

Первичная/Вторичная	h1	h2	h3	h4	-
h1	-	11782017	889315	893720	12330837079
h2	17404350	-	798321	785311	12118515706
h3	354821	354596	-	354986	505338
h4	356858	355647	355057		503271

Спасибо за внимание.

Следующая лекция —
Графы.